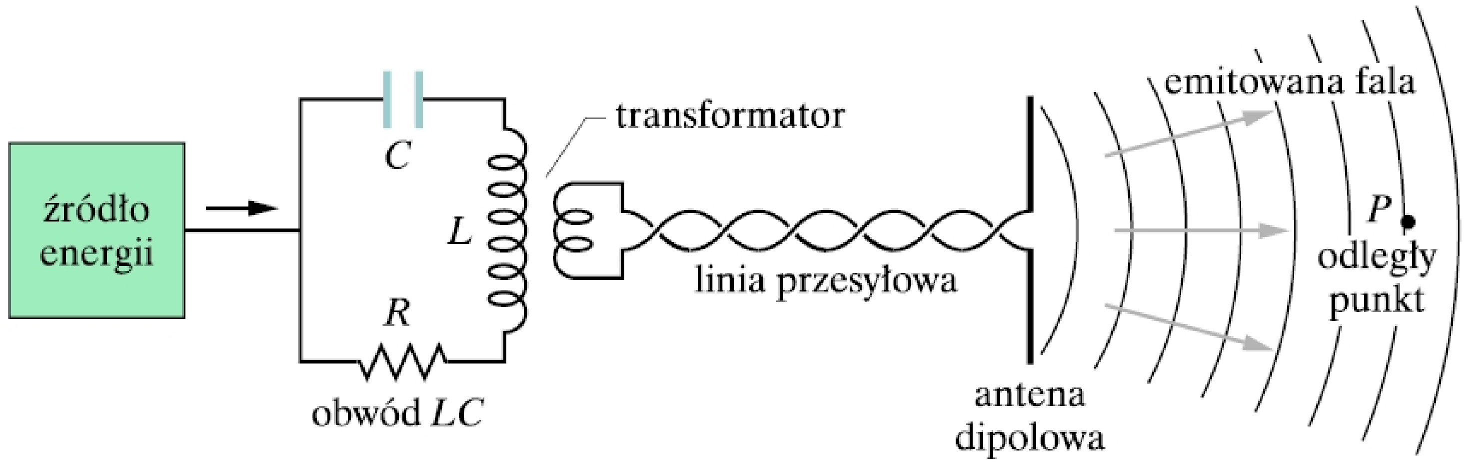
Proszę o uwagę

23. Fale elektromagnetyczne

- równanie fali elektromagnetycznej,
- widmo fal elektromagnetycznych,
- źródła fal elektromagnetycznych,
- oddziaływanie promieniowania z materią,
- współczynnik załamania ośrodka.

Fale elektromagnetyczne

- Przyspieszony ładunek emituje pola elektryczne i magnetyczne propagujące się z prędkością światła c



Równania Maxwella

- Prawo Gaussa dla pola elektrycznego

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho dV$$

źródłowość pola – ładunek elektryczny wytwarza pole elektryczne

- Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

nie istnieje ładunek magnetyczny, pole magnetyczne jest bezźródłowe

- Prawo indukcji elektromagnetycznej

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

zmienne pole magnetyczne wytwarza wirowe pole elektryczne (prąd elektryczny)

- Uogólnione prawo Ampera

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

prąd elektryczny lub zmienne pole elektryczne wytwarzają wirowe pole magnetyczne

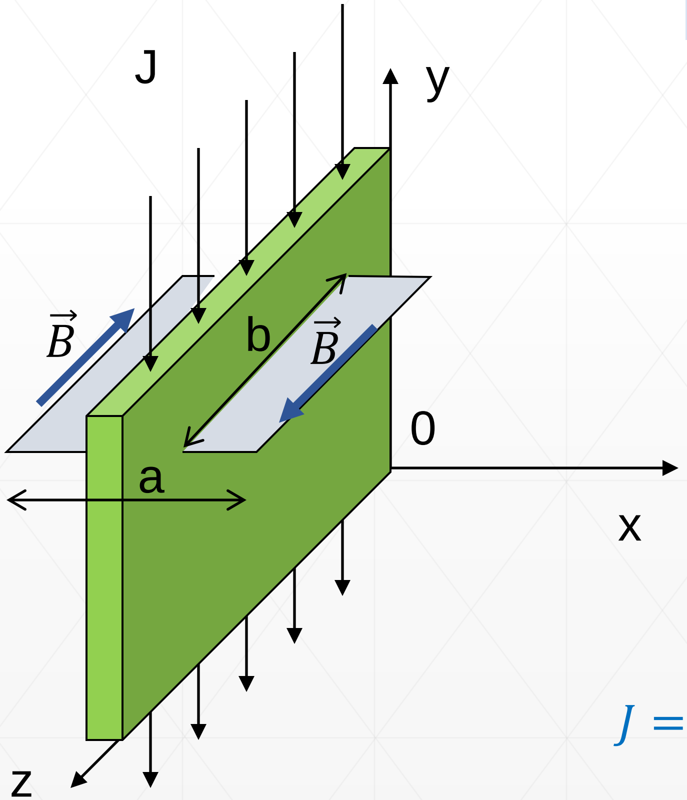
$$\vec{D} = \varepsilon_o \varepsilon_r \vec{E} \;; \quad \vec{B} = \mu_o \mu_r \vec{H}$$

oraz dwa równania materiałowe

Równanie różniczkowe fali elektromagnetycznej

rozpatrzmy prostokątny element nieskończonej powierzchni z prądem powierzchniowym J [A/m]

Z uogólnionego prawa Ampera dla konturu w kształcie prostokąta o bokach a, b wyznaczmy indukcję w pobliżu powierzchni:



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o \oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} + \cancel{\frac{1}{c^2}\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}}$$

$$a \to 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} dS \to 0$$

J [A/m], *j* [A/m^2]

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2Bb = \mu_o jab = \mu_o Jb$$

$$B = \frac{\mu_o J}{2}$$

$$J = J_o \cos\omega\,\mathrm{t} \quad \Rightarrow \quad B_z(0,t) = \frac{\mu_o}{2} J_o \cos\omega\, t$$

Wyznaczmy pole magnetyczne w punkcie P odległym od płaszczyzny

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0 + \frac{1}{c^2}\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

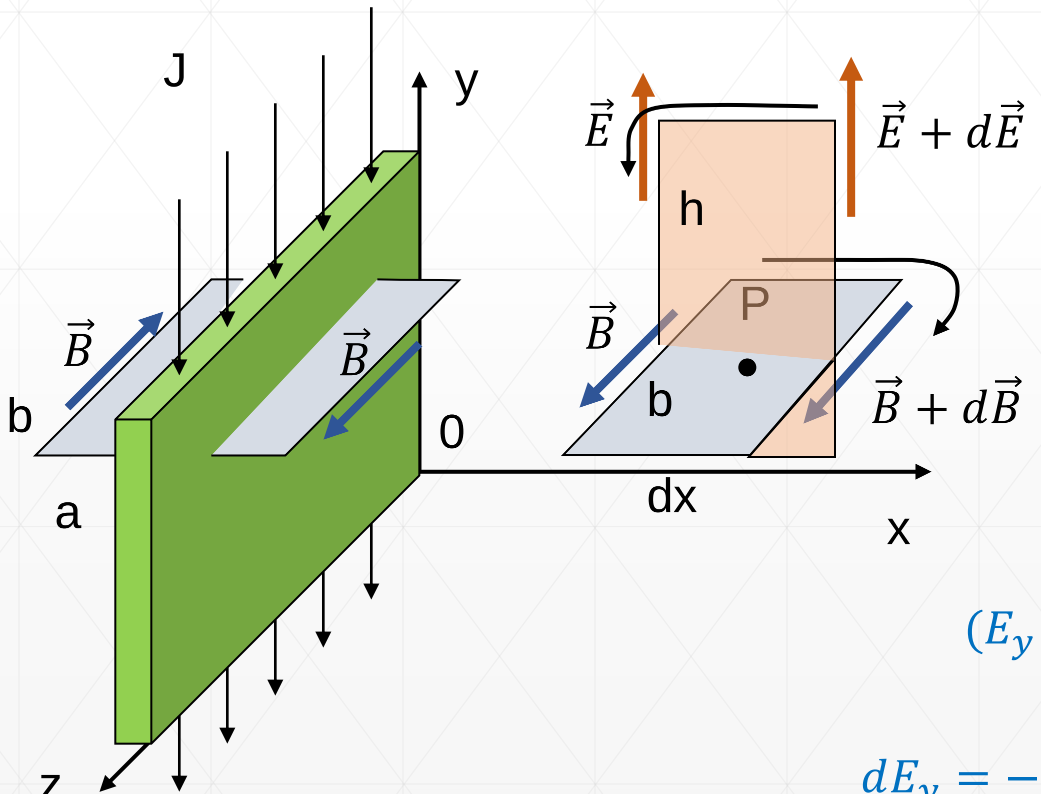
$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = -\int E_y dS = -E_y b dx$$

element powierzchni (bdx) jest skierowany w kierunku ujemnych y

$$(B_z + dB_z)b - B_z b = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} b dx$$

$$dB_z = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y dx}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}}$$



składową E_y wyznaczymy z prawa Faradaya dla konturu (h,dx)

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int B_z dS = B_z h dx$$

$$(E_y + dE_y)h - E_y h = -\frac{\partial B_z h dx}{\partial t}$$

$$dE_y = -\frac{\partial B_z dx}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}}$$

Rozwiązując układ równań z dwiema niewiadomymi B_z i E_y otrzymujemy:

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x} \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}}$$

Porównując ze znanym równaniem fali biegnącej

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

otrzymaliśmy różniczkowe równania Maxwella dla E, B

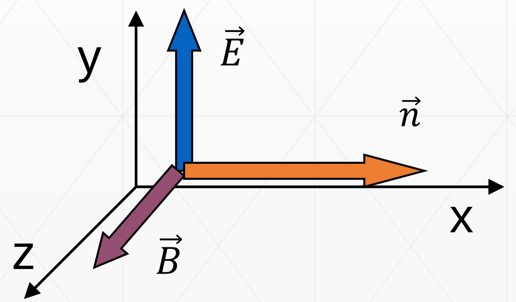
Wnioski

- wokół płaszczyzny z prądem zmiennym w czasie powstają pola magnetyczne i elektryczne, spełniające równanie falowe,

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}; \qquad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

tzn. pola magnetyczne i elektryczne rozchodzą się w postaci fali, zwanej **falą elektromagnetyczną**, w kierunku osi *x*, z prędkością fazową *c*

- pola te są wzajemnie prostopadłe do siebie i do kierunku rozchodzenia się tych pól w przestrzeni (kierunku propagacji fali), tzn. $B_z \perp E_y \perp \tilde{n}$



$$\vec{n} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\left|\vec{E} \times \vec{B}\right|}$$

- prędkość fazowa fali równa jest prędkości światła $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}} = 3 \cdot 10^8\, m/s$

Znajdźmy postać $B_z(x,t)$ i $E_y(x,t)$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Warunek brzegowy $B_z(0,t) = \frac{\mu_o}{2} J_o \cos\omega\, t$

$$B_z(x,t) = B_o \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \phi\right]$$

Dla x=0 $B_z(0,t) = B_o \cos[\omega t + \phi]$

$$B_o = \frac{\mu_o}{2} J_o, \quad \phi = 0$$

$$B_z(x,t) = B_o \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Korzystając ze związku:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial \mathrm{t}} = -\frac{\partial\left(B_o \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)}{\partial \mathrm{t}} = \omega B_o \sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

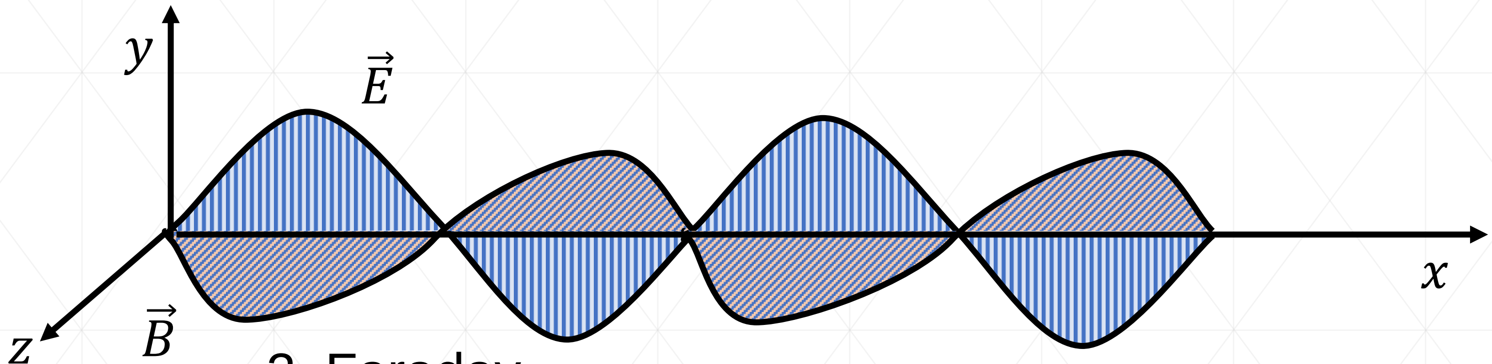
$$E_y = \omega\, \mathrm{B}_o \int \sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) dx = cB_o \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + const$$

const = 0 bo ρ = 0

$$E_y = cB_z = cB_o \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$E_y(x,t) = E_o \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$E_o = cB_o$$



2. Faraday

zmiana $B \rightarrow E$

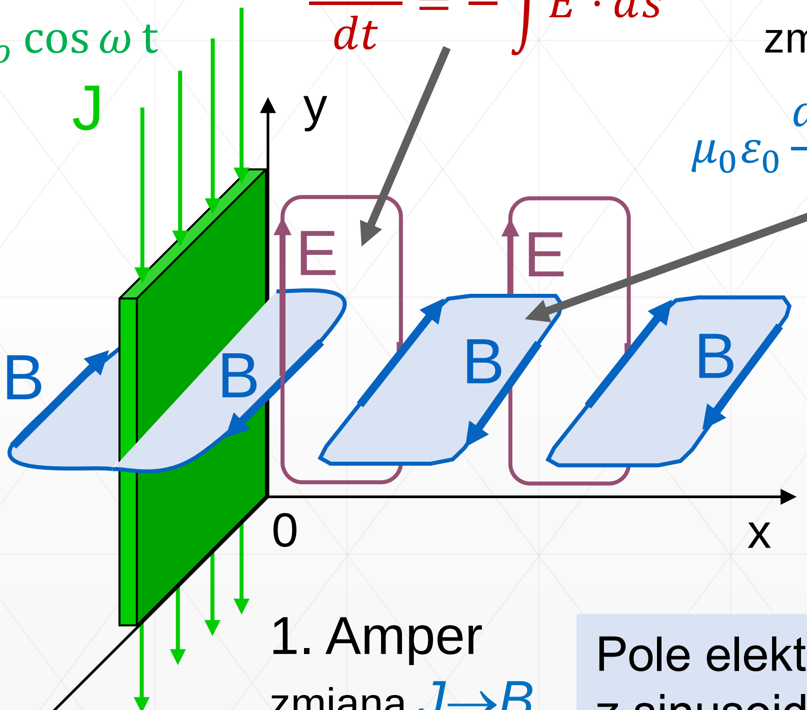
$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

3. Amper

zmiana $E \rightarrow B$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$J = J_o \cos \omega\, t$$



1. Amper

zmiana $J \rightarrow B$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$B_z(x,t) = B_o \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$E_y(x,t) = E_o \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$E_o = cB_o$$

$$c = \frac{\omega}{k}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

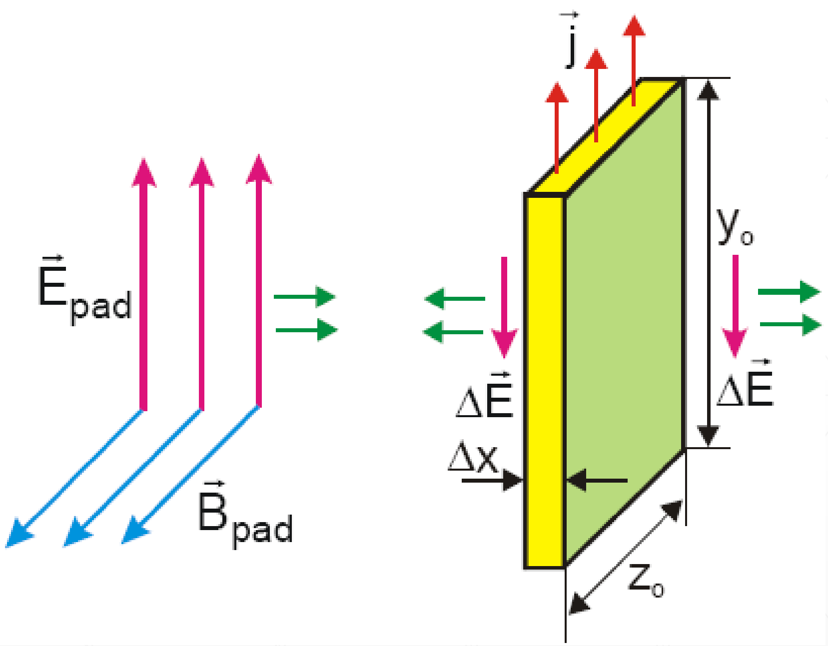
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$$

Pole elektryczne i magnetyczne wokół płaszczyzny z sinusoidalnie zmieniającym się prądem jest falą sinusoidalną rozchodzącą się w kierunku osi x z prędkością c nazywaną falą elektromagnetyczną

Wektor Poyntinga

I [A], J [A/m], j [A/m^2]

Jedną z ważnych własności ruchu falowego jest zdolność przenoszenia energii od punktu do punktu. Rozpatrzmy płaską falę elektromagnetyczną padającą na przewodzącą płytkę o grubości Δx indukującą prąd I



$$I = jz_o\Delta x \qquad V = Ey_o$$

Moc tracona na ciepło Joule'a

$$\frac{dW}{dt} = I \cdot V = jE \cdot (y_o z_o \Delta x)$$

Indukowany prąd J promieniuje falę elektromagnetyczną

$$J = I/z_0$$

$$\Delta E = -\frac{c\mu_o}{2}J = -\frac{c\mu_o}{2}j\Delta x$$

Straty mocy na jednostkę powierzchni wynoszą

$$\Delta P_S = \frac{1}{y_o z_o}\frac{dW}{dt} = jE\Delta x \qquad \Delta P_S = -\frac{2}{c\mu_o}E\Delta E$$

Całkowita moc promieniowania z jednostki powierzchni równa jest całkowitej mocy pochłoniętej w nieskończonej liczbie płytek

$$P_S = -\frac{2}{c\mu_o}\int_{E_{pad}}^{0} E\,dE = \frac{1}{c\mu_o}E_{pad}^2 = \frac{1}{\mu_o}E_{pad}B_{pad}$$

$$\vec{P}_S = \frac{1}{\mu_o}\vec{E} \times \vec{B}$$

Wektor Poyntinga

Wektor Poyntinga

$$\vec{P}_S = \frac{1}{\mu_o}\vec{E} \times \vec{B}$$

Wektor Poyntinga określa kierunek, wielkość i zwrot strumienia energii fali elektromagnetycznej

Wyznaczmy gęstość energii w pola elektromagnetycznego padającego na powierzchnię A o grubości dx

$$dt = \frac{dx}{c}$$

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{P_S A dt}{A dx} = \frac{P_S}{c}$$

$$P_S = \frac{1}{\mu_o} EB = cw$$

Wektor Poytinga określa szybkość z jaką energia fali przepływa przez jednostkową powierzchnię w danej chwili, czyli moc promieniowania na jednostkę powierzchni

$$E = cB$$

$$w = \frac{1}{c\mu_o} EB$$

$$w = \frac{B^2}{\mu_o} = \frac{B^2}{2\mu_o} + \frac{B^2}{2\mu_o} = \frac{E^2}{2\mu_o c^2} + \frac{B^2}{2\mu_o}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}}$$

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_o}$$

Otrzymujemy znany wzór na gęstość energii pola elektrycznego i magnetycznego

Pęd (ciśnienie) promieniowania

Fala elektromagnetyczna posiada zarówno energię jak i pęd. Padając na płytkę pole elektryczne indukuje prąd w kierunku osi OY. Na indukowany prąd działa siła elektrodynamiczna zgodnie z kierunkiem padania fali

$$\vec{F}_m = \vec{I}y_o \times \vec{B} \qquad F_m = Iy_oB$$

Ilość energii wydzielonej na ciepło Joule'a w elemencie o grubości Δx wynosi:

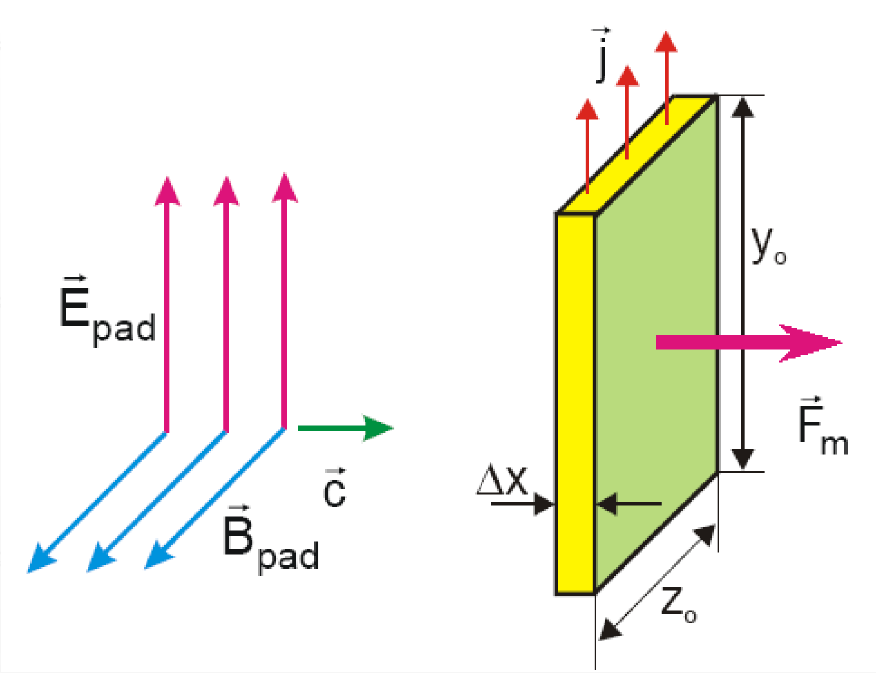
$$dW = (jEdt)(y_oz_o\Delta x) \qquad E = cB$$

$$I = j(z_o\Delta x) \qquad dW = cIy_oBdt$$

Z II zas. dynamiki Newtona zmiana pędu dp

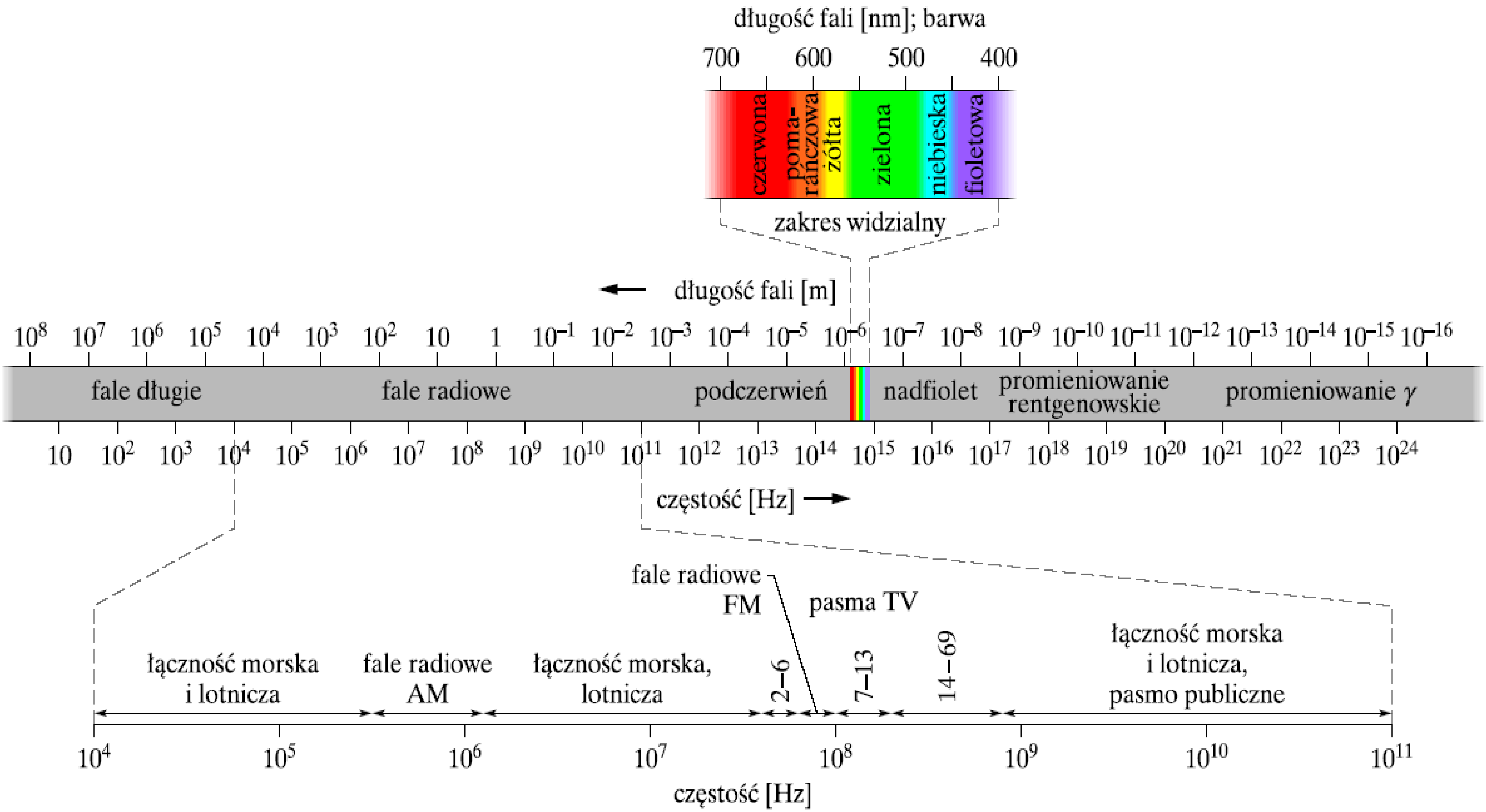
$$dp = F_mdt = Iy_oBdt = \frac{1}{c}dW$$

$$dW = \frac{P_S}{c}dV \qquad d\vec{p} = \frac{\vec{P}_S}{c^2}dV$$



Element objętości dV pola promieniowania cechuje wektor pędu $d\vec{p}$ proporcjonalny do $\vec{P}_S$.
Oświetlając ciało wywieramy na nie ciśnienie.
Pomiar pędu (ciśnienia) strumienia świetlnego jest utrudniony bo wartość $1/c$ jest mała.

Widmo fal elektromagnetycznych



Źródła fal elektromagnetycznych

Rodzaj fal	Wytwarzanie	Zastosowanie	Problemy
Radiowe (λ>0.1 m; f=3 Hz- 108 MHz): radiowe AM i FM; telefonii komórkowej; telewizji	Przyspieszanie ładunków (prąd zmienny w antenie)	Komunikacja Zdalne sterowanie Rezonans magnetyczny	Do użycia wymagają kontroli pasm
Mikrofalowe (f=10^9 – 10^{12} Hz): kuchenki – 2,45 GHz; WiFi 2,4 i 5 GHz;	Przyspieszenie ładunków w urządzeniach makroskopowych i obwodach; Kosmiczne promieniowanie tła	Komunikacja Kuchenki mikrofalowe Radary Telefony komórkowe	
Podczerwień	Wzbudzenie termiczne lub przejścia elektronowe	Obrazowanie termiczne Podgrzewanie	Absorbcja przez atmosferę - efekt cieplarniany
Światło widzialne (λ= 400 – 750 nm)	Wzbudzenie termiczne lub przejścia elektronowe	Fotosynteza Ludzkie widzenie	
Ultrafiolet (nadfiolet) (λ= 10 – 400 nm):	Wzbudzenie termiczne lub przejścia elektronowe	Sterylizacja Pro-dukcja witaminy D	Mogą powodować raka
Promieniowanie X (λ=10^{-8} – 10^{-12} m):	Wewnętrzne przejścia elektronowe lub szybkie zderzenia	Bezpieczeństwo Diagnostyka medy-czna Terapie rakowe	Mogą powodować raka
Promieniowanie gamma (λ< 10^{-12} m)	Rozpad promieniotwórczy	Medycyna nuklearna	Powodują uszkodzenia

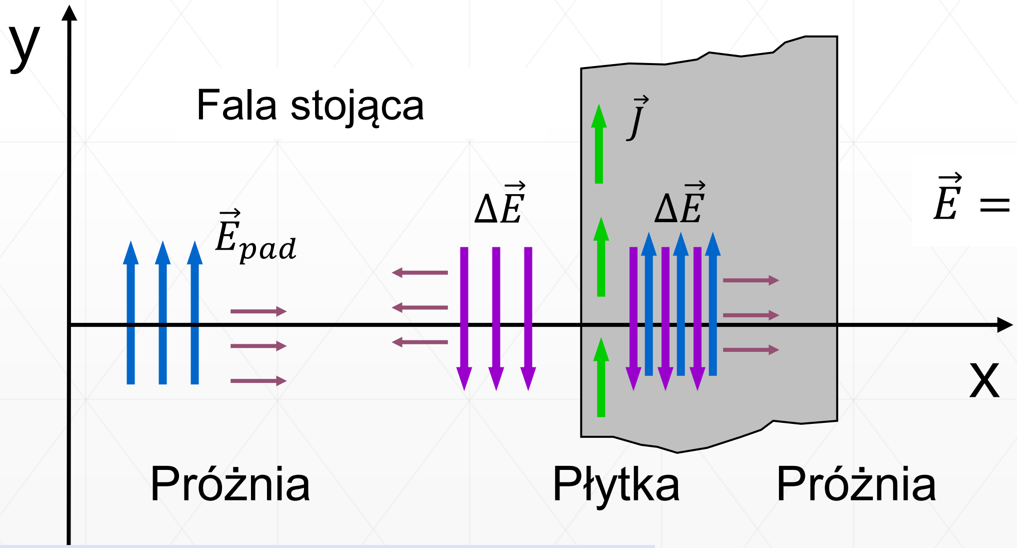
Oddziaływanie promieniowania z materią

- słaby przewodnik absorbuje energię i pęd fali i prawie nie odbija (grafit, zjonizowany gaz)
- bardzo dobry przewodnik odbija falę całkowicie (srebro, nadprzewodniki)
- w dielektryku fala rozchodzi się z mniejszą prędkością niż w próżni i ulega dyspersji (szkło, gaz)
- w plazmie fala rozchodzi się z prędkością większą od prędkości światła

Odbicie promieniowania od przewodnika

Na płytkę z idealnego przewodnika (np. nadprzewodnika) pada fala elektromagnetyczna. Indukowany prąd powierzchniowy daje pole promieniowania równe natężeniu fali padającej (bo nie ma strat).

$$\Delta E = -E_{pad}$$



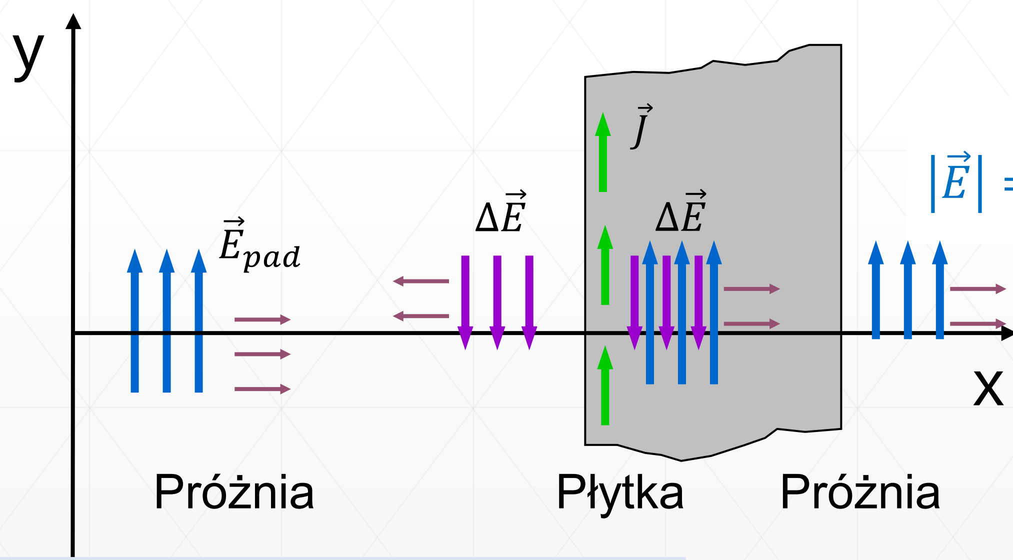
$$\vec{E} = \vec{E}_{pad} + \Delta\vec{E} = 0$$

Fala odbita interferuje z padającą dając falę stojącą. Za płytką indukowane pole znosi się z falą padającą.

Odbicie promieniowania od przewodnika

Na płytkę ze słabego przewodnika pada fala elektromagnetyczna. Indukowany prąd powierzchniowy daje pole promieniowania mniejsze od natężenia fali padającej (bo są straty).

$$\Delta E < -E_{pad}$$



Fala przechodząca

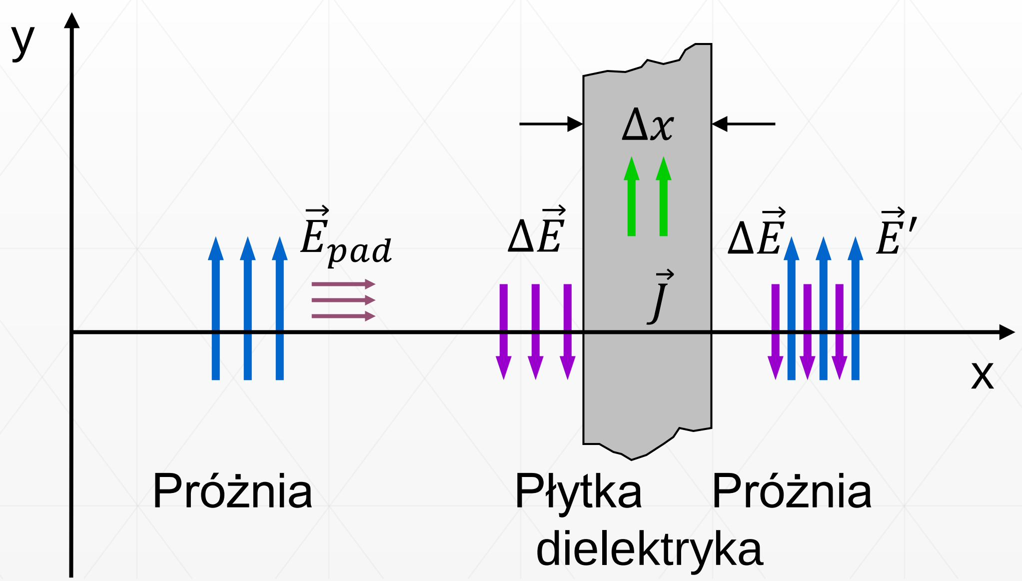
$$\left|\vec{E}\right| = \left|\vec{E}_{pad} + \Delta\vec{E}\right| < \left|\vec{E}_{pad}\right|$$

$$\left|\vec{E}\right|^2 = \left|\vec{E}_{pad}\right|^2 e^{-\alpha x}$$

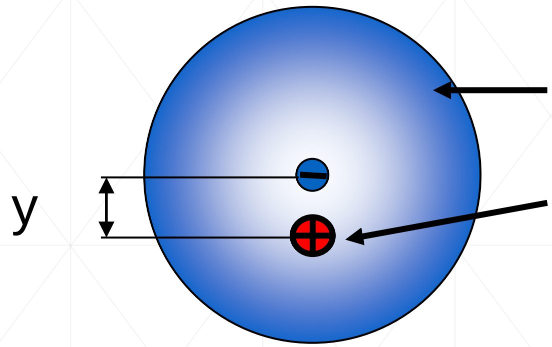
W słabym przewodniku występują straty energii na ciepło Joule'a i promieniowanie jest częściowo pochłaniane

Dielektryki

- na płytkę o grubości Δx pada płaska fala EM
- pole E_{pad} wymusza drgania elektronów
- drgające elektrony promieniują fale EM ΔE
- brak pochłaniania (nie ma strat na ciepło Joule'a)
- faza wypadkowej fali E' zależy od współczynnika załamania



Oddziaływanie promieniowania z dielektrykiem



Elektrony w postaci chmury elektronowej przesunięte pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego względem protonu (polaryzacja elektronowa) zaczynają drgać z częstością kołową drgań własnych ω_o po usunięciu tego pola.

$$\omega_o = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r m_e r^3}}$$

jeśli na atom pada fala elektromagnetyczna postaci $E_{pad} = E_o \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$

to ustalą się drgania wymuszone $y = -\frac{eE_o}{m(\omega_o^2 - \omega^2)}\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$

Drgania te są źródłem prądu, który generuje falę elektromagnetyczną przesuniętą w fazie względem fali padającej. Wypadkowa fala rozchodzi się z mniejszą prędkością *u = c/n*, gdzie *n* to współczynnik załamania zależny od częstości promieniowania i drgań własnych elektronów.

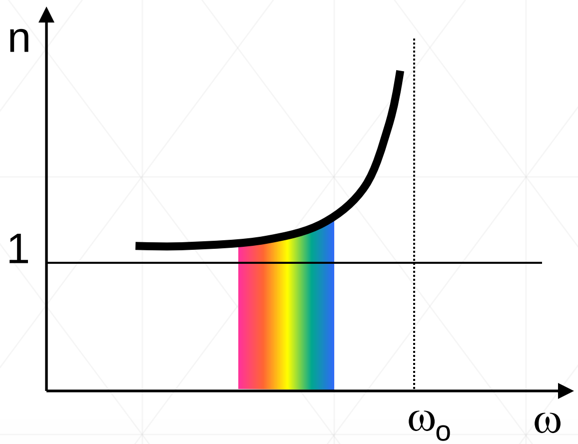
$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_o m(\omega_o^2 - \omega^2)}$$

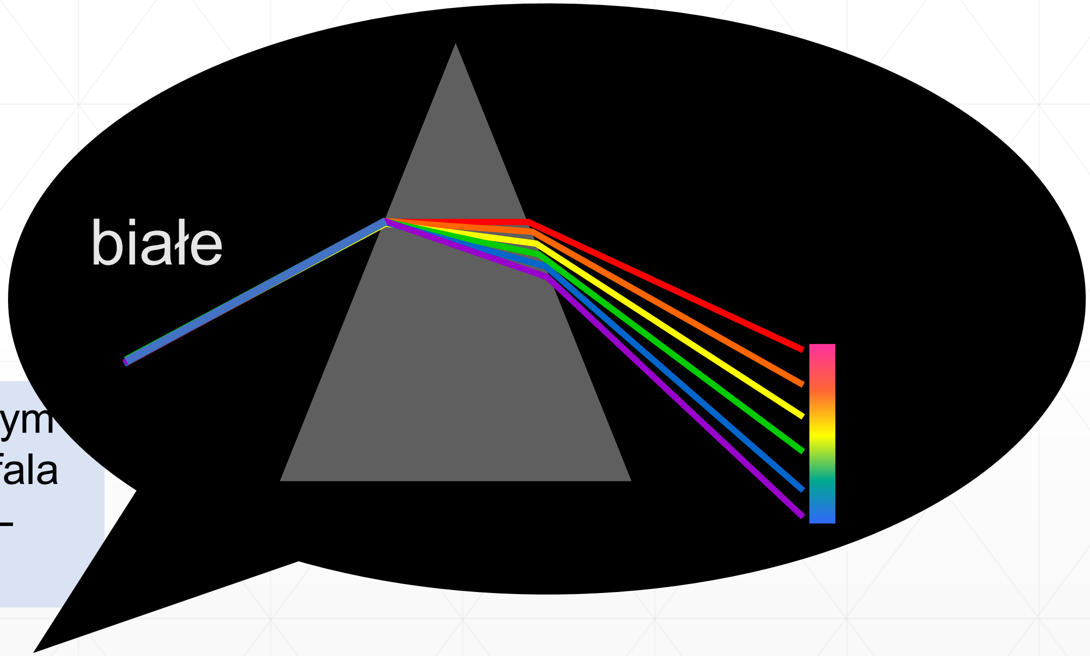
$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_o m(\omega_o^2 - \omega^2)}$$

Współczynnik załamania związany jest z przenikalnością dielektryczną i magnetyczną ośrodka

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \mu_r \varepsilon_o \varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

pryzmat





Światło (fala EM) w ośrodku dielektrycznym ulega dyspersji: większe ω czyli krótsza fala to współczynnik załamania jest większy – tzw. dyspersja normalna

Dla większości atomów $\omega_o > \omega$, gdzie ω odpowiada zakresowi widzialnemu światła. Przy przejściu od zakresu czerwonego do fioletowego widma współczynnik załamania wzrasta – rośnie również odchylenie promieni przechodzących przez pryzmat

Promieniowanie elektromagnetyczne w ośrodku zjonizowanym

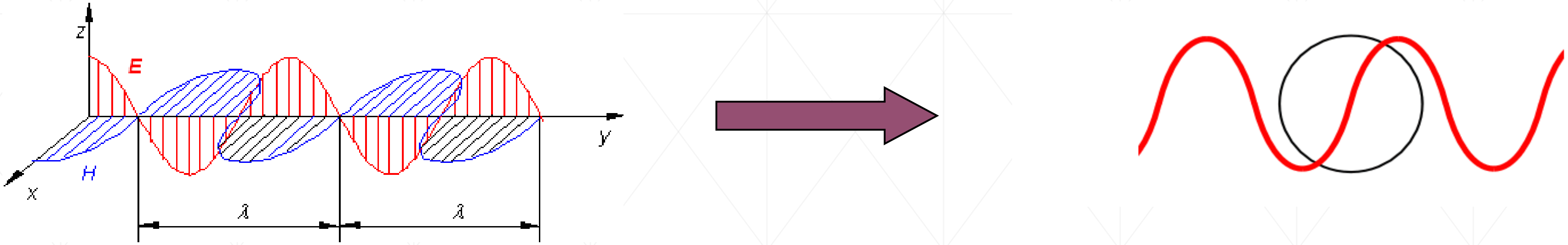
W plazmie lub zjonizowanym gazie elektrony nie są związane, więc $\omega_o = 0$

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_o m(\omega_o^2 - \omega^2)}$$

$$n = 1 - \frac{Ne^2}{2\varepsilon_o m\omega^2}$$

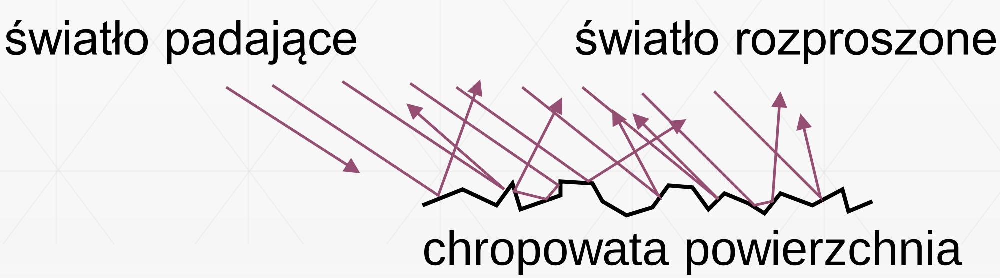
W tym przypadku współczynnik załamania $n < 1$, co oznacza, że prędkość fali jest większa od c ($u = c/n$). Zjawisko to nosi nazwę **dyspersji anomalnej**.

Czynnikiem fizycznym powodującym pojawienie się prędkości większej od prędkości światła są relacje fazowe pomiędzy siłą wymuszającą a przemieszczeniem oscylującego ładunku (siła wyprzedza przemieszczenie)



Rozpraszanie światła

- fala elektromagnetyczna oddziaływuje na elektrony pobudzając je do drgań, w których elektrony, zbliżając się do jądra i oddalając od niego, tworzą oscylujące dipole elektryczne
- dipole te stają się wtórnym źródłem promieniowania fal EM, rozchodzących się we wszystkich kierunkach z taką samą częstością jak fala pierwotna – **rozpraszanie Rayleigha**
- moc promieniowania rozproszonego zależy od ω^4 – stąd przewaga barwy niebieskiej w rozpraszanym świetle słonecznym (**$I \sim 1/\lambda^4$**)
- rozpraszanie to również odbicie światła od niejednorodnej powierzchni (tzw. odbicie dyfuzyjne)



Podsumowanie

- Fala elektromagnetyczna – rozchodzące się w przestrzeni pole elektryczne i magnetyczne
- Równanie fali EM wynika z prawa Faradaya i Ampera
- Energia i pęd fali EM
- Przykłady fal elektromagnetycznych
- Jak fala EM oddziałuje z materią: odbicie fali, pochłanianie, dyspersja, rozpraszanie.

Dziękuję za uwagę