



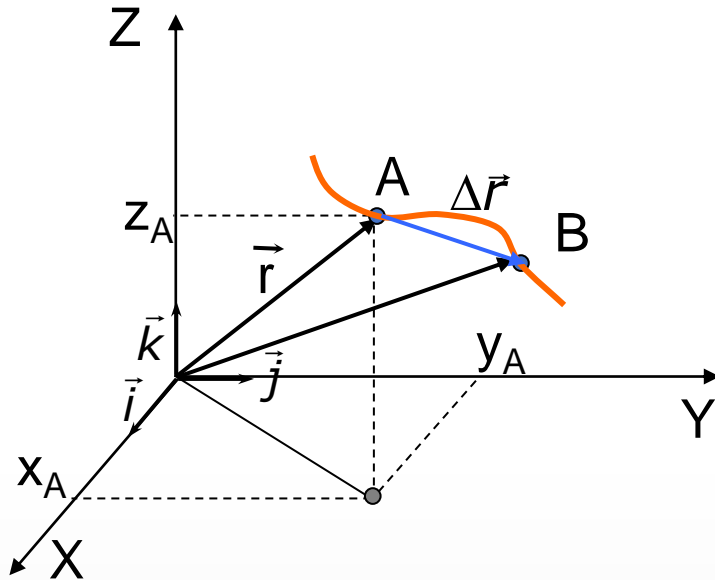
Proszę o uwagę

4. Ruch krzywoliniowy

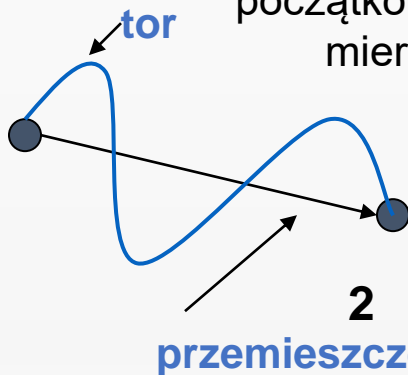
- opis ruchu 3D,
- parametryczne równanie toru ruchu,
- położenie, prędkość i przemieszczenie,
- przyspieszenie styczne i normalne do toru ruchu,
- rzut poziomy i ukośny,
- wielkości opisujące ruch po okręgu.



Ruch w trzech wymiarach



droga s – odległość pomiędzy położeniem początkowym i końcowym mierzona wzdłuż toru



- położenie cząstki – podanie współrzędnych cząstki (**wektor położenia**)

$$\vec{r} = (x, y, z) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{r}_A = (2, 3, 2.5) \quad \vec{r}_B = (1, 4, 2)$$

- ruch** – zmiana położenia względem układu odniesienia

- tor** (trajektoria) cząstki – linia którą zakreśla poruszająca się cząstka

- przemieszczenie** $\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

$$\Delta \vec{r} = (1 - 2, 4 - 3, 2 - 2.5) = (-1, 1, -0.5)$$

Prędkość

cząstka porusza się po krzywoliniowym torze z punktu A do B w czasie Δt przebywając drogę Δs

- prędkość średnia

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

- prędkość chwilowa

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \quad \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

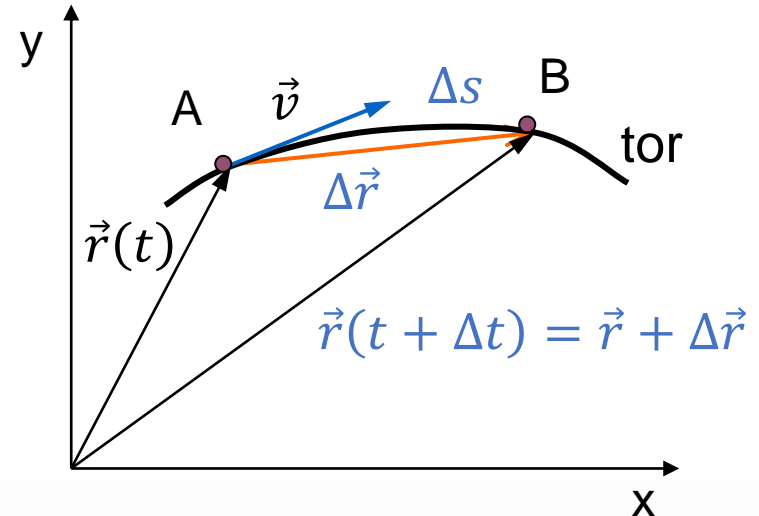
- wartość liczbowa prędkości chwilowej jest równa długości wektora \vec{v}

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

lub pochodnej drogi
względem czasu

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

- wektor prędkości jest styczny do toru ruchu $\vec{v} = v \vec{l}_t$, \vec{l}_t wektor jednostkowy



Przyspieszenie styczne i normalne

Określmy jakim zmianom w czasie podlega wektor prędkości \vec{v}

$$\vec{v} = v\vec{i}_t \quad \vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{i}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{i}_t + \frac{d\vec{i}_t}{dt}v$$

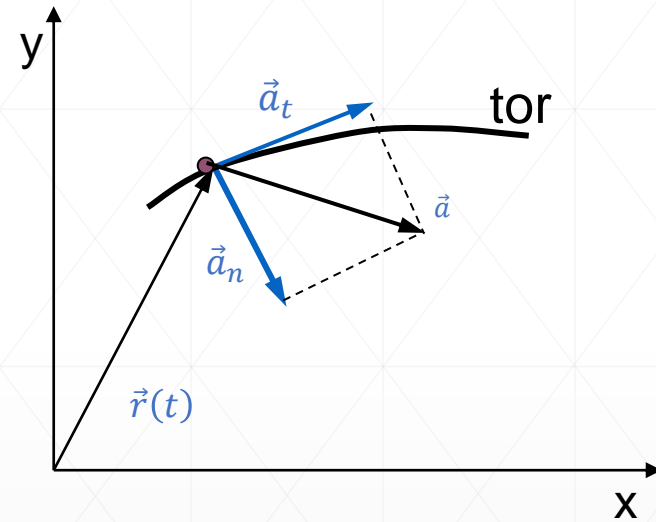
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

przyspieszenie styczne
szybkość zmiany wartości v

$$a_n = \frac{di_t}{dt}v = \frac{v^2}{R}$$

przyspieszenie normalne
szybkość zmiany kierunku ruchu
(R – promień krzywizny)



Przykład:

$$\vec{r} = (3t^2, 4t^2)$$

$$\vec{v} = (6t, 8t)$$

$$\vec{a} = (6, 8)$$

$$v = 2\sqrt{9t^2 + 16t^2} = 10t$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 10$$

$$a = 2\sqrt{9 + 16} = 10$$

Co to oznacza, że $a_t = a$?

Ruch w dwóch wymiarach

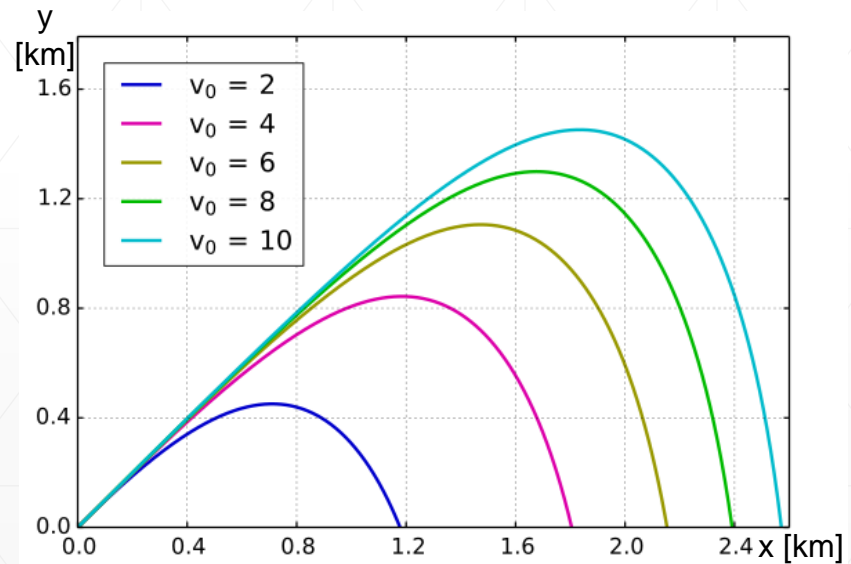
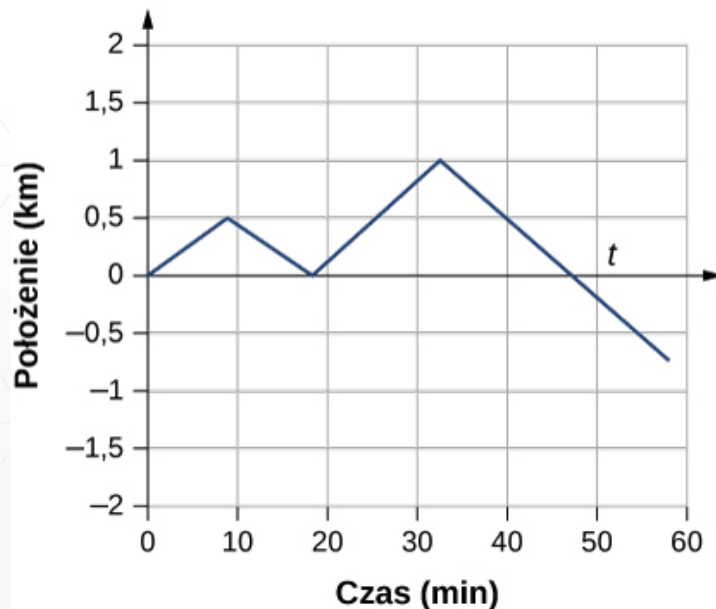
Zaznaczając, że wektor położenia punktu zmienia się w czasie

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}$$

to $x(t)$, $y(t)$, są **kinematycznymi równaniami ruchu**.

Eliminując z tych równań czas otrzymamy **równanie toru**.

Położenie w funkcji czasu



Krzywe balistyczne przy takim samym kącie wystrzału i masie, lecz różnych prędkości początkowych.

Tor ruchu ciała – miejsce geometryczne kolejnych położenia ciała.

Rzut poziomy

Rzutem poziomym nazywamy ruch ciała rzuconego z określonej wysokości h w kierunku poziomym z prędkością v_0 .

Rzut poziomy jest ruchem złożonym z dwóch ruchów prostoliniowych: jednostajnego w kierunku poziomym z prędkością początkową v_0 oraz jednostajnie przyspieszonego z prędkością początkową $v_0 = 0$ i przyspieszeniem ziemskim g zwróconym ku środkowi kuli ziemskiej (przeciwnie do kierunku osi OY).

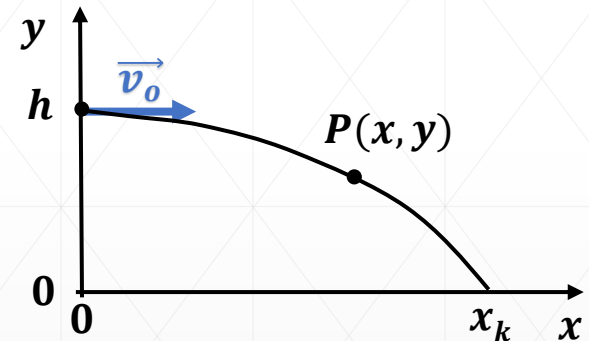
ruch poziomy: $x = v_0 \cdot t$, $v_x = v_0$

ruch pionowy: $y = h - g \frac{t^2}{2}$, $v_y = -g \cdot t$

Czas t_0 po którym ciało upadnie na ziemię wyznaczmy z warunku $y = 0$, a miejsce upadku ciała z równania $x_k = v_0 \cdot t_0$

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$x_k = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$



Równanie toru ruchu $y = h - \frac{g}{v_0^2} x^2$ przedstawia parabolę

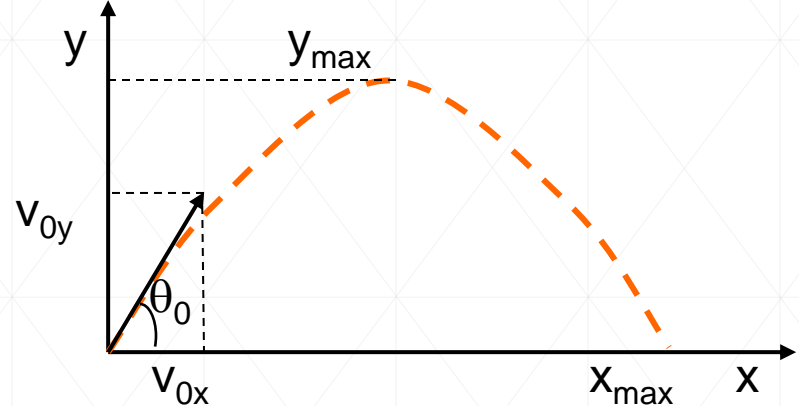
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

$$\vec{r}_0 = (0, h)$$

$$\vec{v}_0 = (v_0, 0)$$

$$\vec{a} = (0, -g)$$

Rzut ukośny



ruch z prędkością początkową v_0 i z przyspieszeniem ziemskim g

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

wektor prędkości początkowej możemy przedstawić w postaci sumy jego składowych w kierunku poziomym x i pionowym y

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} \quad \text{gdzie} \quad v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \quad v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$$

w rzucie ukośnym ruch cząstki w kierunku poziomym i kierunku pionowym można traktować jako niezależne, ale zachodzący w tym samym czasie – żaden z nich nie wpływa na drugi

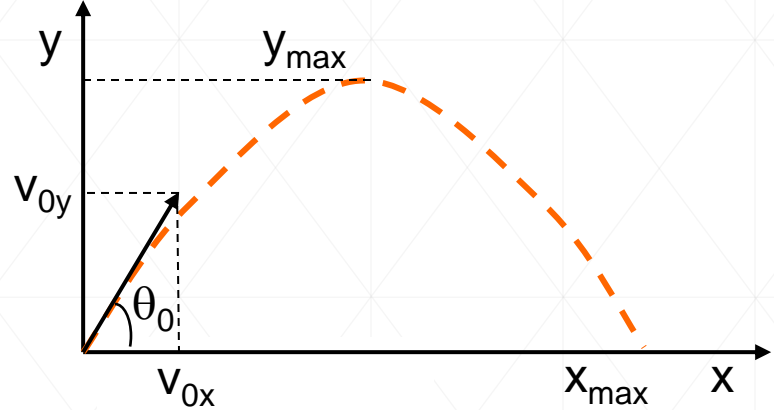
$$\text{ruch w poziomie: } v_{0x} = \text{const.} \quad x = x_0 + v_{0x}t \quad x_0 = 0$$

$$\text{ruch w pionie: } a = -g \quad y = y_0 + v_{0y}t - gt^2/2 \quad y_0 = 0$$

$$t = \frac{x}{v_{0x}} \quad y = v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - g \frac{x^2}{2v_{0x}^2}$$

jest to równanie toru ruchu - parabola

Rzut ukośny



równanie toru:
$$y = (tg\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}$$

równanie paraboli

prędkość w ruch w poziomie: $v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$

prędkość w ruchu w pionie: $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \theta_0 - gt$

maksymalna wysokość: y_{\max} gdy $v_y = 0$ czyli $0 = v_0 \sin \theta_0 - gt_w \rightarrow t_w = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$

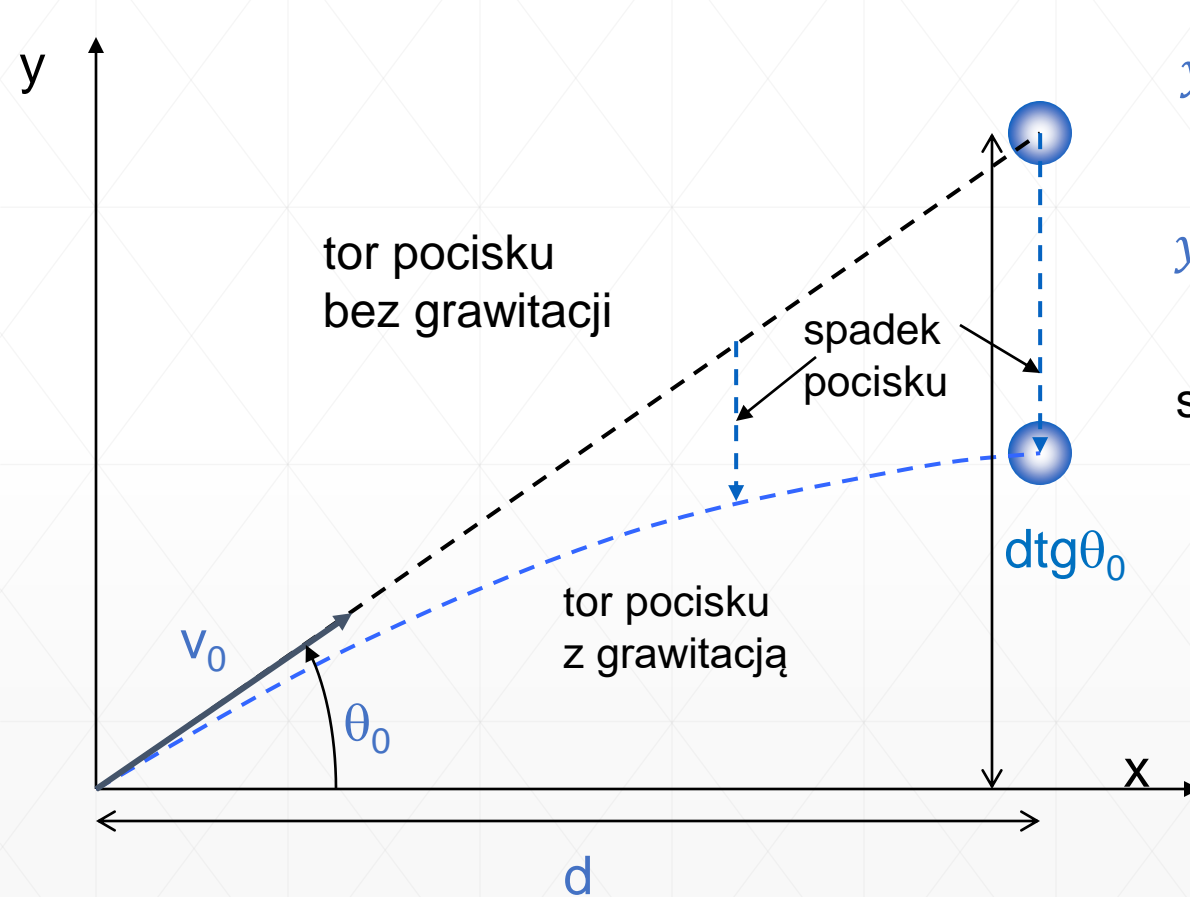
$$y_{\max} = y(t_w) = v_0 \sin \theta_0 t_w - g \frac{t_w^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$$

ponieważ $t_w = t_s$ to $t_c = 2t_w$

zasięg rzutu:
$$x_{\max} = x(t_c) = v_0 \cos \theta_0 \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0$$

Strzelec i mała

Strzelec celuje do kokosu który trzyma mała siedząca na drzewie. W momencie wystrzału mała upuszcza kokos. Czy trafi do celu?



$$y_{poco} = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_{koko} = d \cdot \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

spotkanie gdy $x_{poco} = x_{koko}$

$$x_{poco} = (v_0 \cos \theta_0)t$$

$$x_{koko} = d \quad t = \frac{d}{v_0 \cos \theta_0}$$

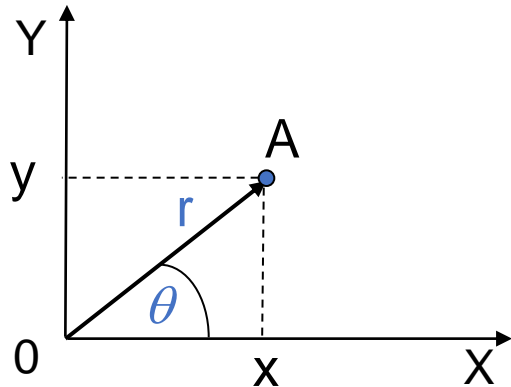
ponieważ

$$(v_0 \sin \theta_0)t = (v_0 \sin \theta_0) \frac{d}{v_0 \cos \theta_0} = d \cdot \operatorname{tg} \theta_0$$

więc $y_{poco} = y_{koko}$

Pocisk zawsze trafi w kokos

Układ biegunowy



- w przypadku analizy ruchu po okręgu wygodniej stosować układ biegunowy poprzez podanie:
 - odległości od środka układu r
 - kąta azymutalnego θ w płaszczyźnie XY

związek pomiędzy współrzędnymi układu kartezjańskiego i biegunowego

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\vec{r} = (r, \theta) \qquad \vec{r}_A = \left(3, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = 3 \cos 45^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2,12$$

$$y = 3 \sin 45^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2,12$$

$$\vec{r} = (2,12, 2,12)$$

Ruch jednostajny po okręgu

promień jest stały $r = \text{const}$, wartość prędkości nie zmienia się i jest ona styczna do toru (okręgu)

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = r(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = (-v \sin \theta)\vec{i} + (v \cos \theta)\vec{j}$$

składowe wyznaczone z rysunku

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = x/r \\ \sin \theta = y/r \end{array} \right\}$$

$$\vec{v} = \left(-v \frac{y}{r}\right)\vec{i} + \left(v \frac{x}{r}\right)\vec{j}$$

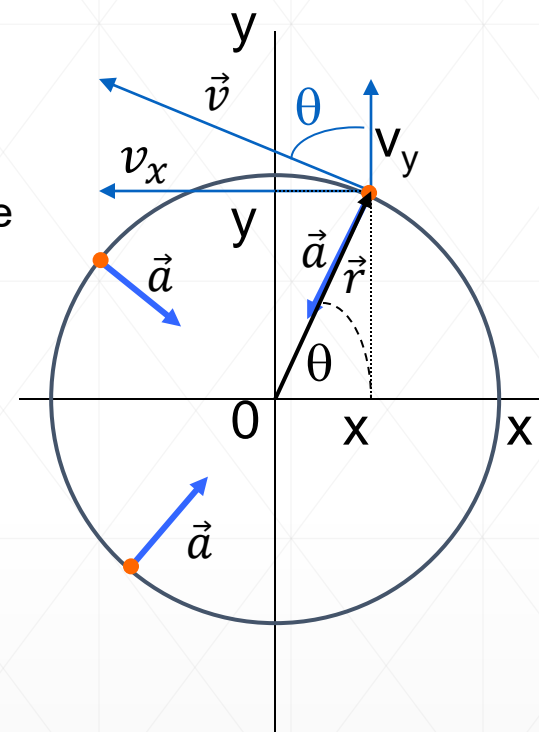
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r} \frac{dy}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{v}{r} \frac{dx}{dt}\right)\vec{j} = \left(-\frac{v}{r} v_y\right)\vec{i} + \left(\frac{v}{r} v_x\right)\vec{j}$$

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r} \cos \theta\right)\vec{i} + \left(-\frac{v^2}{r} \sin \theta\right)\vec{j} = -\frac{v^2}{r} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$$

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = \frac{v^2}{r}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

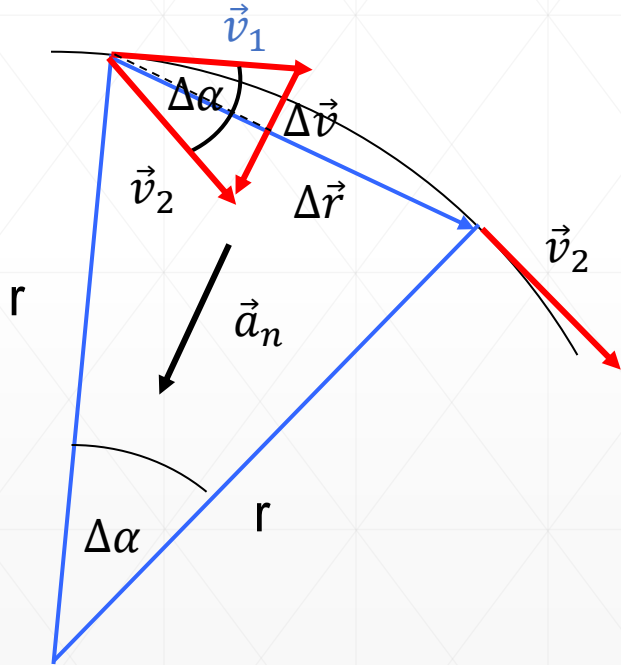


W ruchu jednostajnym po okręgu działa przyspieszenie normalne (dośrodkowe) – bo jest prostopadłe do toru i skierowane do środka okręgu.

Składowa normalna przyspieszenia

Składowa normalna przyspieszenia jest odpowiedzialna za zmianę kierunku wektora \vec{v}

Ruch jednostajny więc: $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$



$$\Delta v = 2v \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \approx v\Delta\alpha$$

Z podobieństwa trójkątów niebieskiego i czerwonego

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}$$

$$a = a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v}{r} v$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

i skierowane jest zgodnie z kierunkiem wektora $\Delta\vec{v}$ czyli do środka okręgu

$$\vec{a}_n \parallel \Delta\vec{v}$$

Przyspieszenie dośrodkowe

Typowe wartości przyspieszenia dośrodkowego

Obiekt	Przyspieszenie dośrodkowe (m/s ²)
Ziemia krążąca wokół Słońca	$5,93 \cdot 10^{-3}$
Księżyc krążący wokół Ziemi	$2,73 \cdot 10^{-3}$
Satelita na orbicie geostacjonarnej	0,233
Zewnętrzna krawędź płyty CD	5,78
Odrzutowiec wykonujący „beczkę”	20 – 30 $\sim(2g - 3g)$
Kolejka górską (roller coaster)	50 $\sim 5g$
Elektron w atomie wodoru wg. Bohra	$9,0 \cdot 10^{22}$

Przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Zmienne opisujące ruch obrotowy

Jednostajny ruch obrotowy po okręgu o promieniu r w układzie biegunowym:

θ – **położenie kątowe** – kąt jaki zakreślił wektor położenia cząstki względem osi OX

s – **długość łuku** zakreślonego przez cząstkę $s = \theta \cdot r$

Kątowi θ można przypisać wektor $\vec{\theta}$ prostopadły do płaszczyzny xy , w której leżą wektor położenia \vec{r} i wektor długości łuku \vec{s} . Te trzy wektory związane są relacją:

$$\vec{s} = \vec{\theta} \times \vec{r}$$

ω - **prędkość kątowa** to szybkość zmiany kąta $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$
i wektor $\vec{\omega}$ posiada ten sam kierunek co wektor $\vec{\theta}$

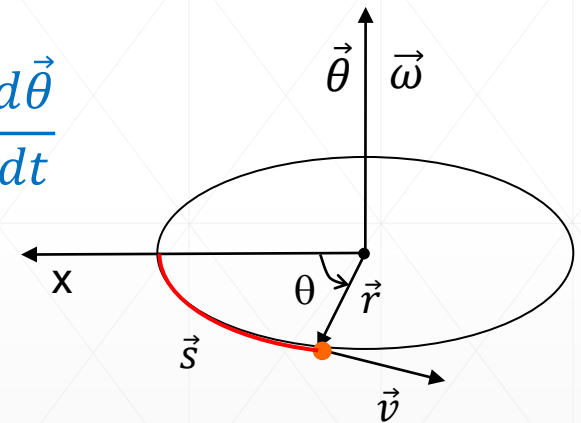
Jednostką prędkości kątowej jest [rad/s].

Ponieważ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d(\vec{\theta} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{r}$$

więc $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ a wartości tych wektorów wiąże relacja $v = \omega \cdot r$

Jeżeli cząstka obracałaby się zgodnie z ruchem wskazówek zegara to wektory $\vec{\theta}$ i $\vec{\omega}$ byłyby skierowane do dołu.



Przyspieszenie kątowe

Jeżeli ruch obrotowy nie będzie jednostajny, to zmiana prędkości kątowej określa chwilowe przyspieszenie kątowe:

$$\varepsilon - \text{przyspieszenie kątowe } \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Korzystając z definicji przyspieszenia liniowego:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{r})}_{=0} - \vec{r} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 \vec{r}$$

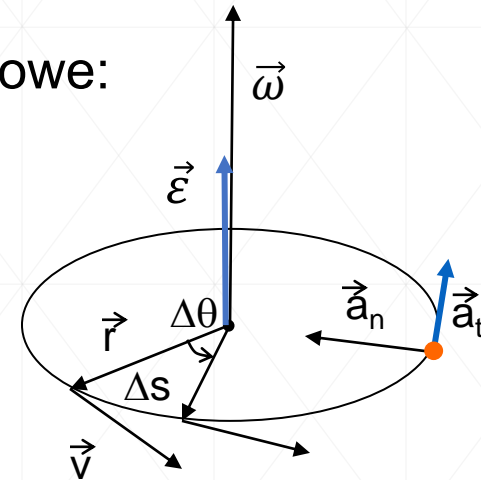
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \text{ tożsamość}$$

otrzymujemy

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega^2 \cdot \vec{r} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad \vec{a}_n = -\omega^2 \cdot \vec{r} = -\frac{v^2}{r^2} \vec{r} = -\frac{v^2}{r} \frac{\vec{r}}{r}$$

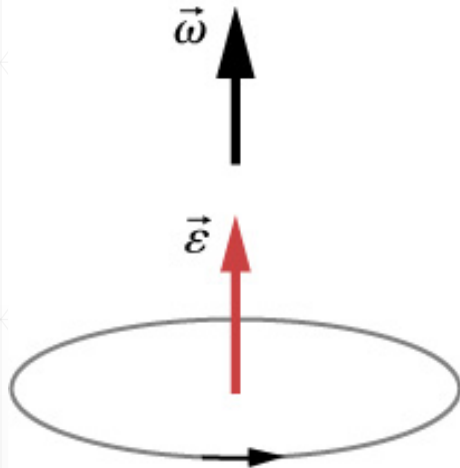
Przyspieszenie styczne i normalne (dośrodkowe)

czyli przyspieszenie kątowe określa przyspieszenie styczne

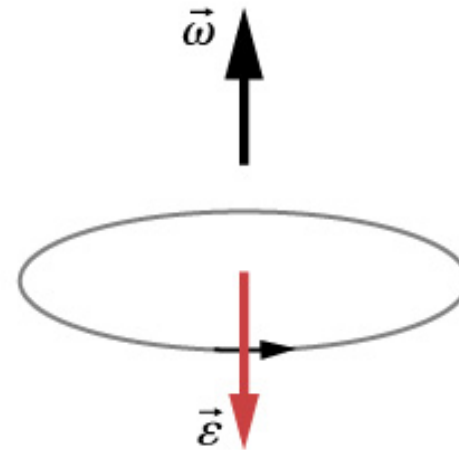


Prędkość kątowa i przyspieszenie kątowe

Wektor przyspieszenia kątowego jest, podobnie jak $\vec{\theta}$ i $\vec{\omega}$, również prostopadły do płaszczyzny xy po której porusza się cząstka, a jego zwrot zależy od kierunku zmian prędkości kątowej.



(a) Obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, prędkość kątowa rośnie



(b) Obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, prędkość kątowa maleje

W. Moebbs, S. J. Ling, J. Sanny, Fizyka dla szkół wyższych, t.1, openstax, Polska, 2018

W przypadku (a) ruch jest przyspieszony, w przypadku (b) opóźniony.

Przykład – wirujące koło rowerowe

Mechanik rowerowy umieszcza rower w stojaku do napraw rowerów i zaczyna obracać tylne koło. W czasie 5 s od początku ruchu osiąga ono prędkość kątową wynoszącą 250 obrotów na minutę. Wyznacz w rad/s^2 średnie przyspieszenie kątowe. Po jakim czasie koło się zatrzyma, jeżeli mechanik wciśnie hamulec, wytwarzając przyspieszenie kątowe równe $-87,3 \text{ rad/s}^2$?

Rozwiązanie: Średnia wartość przyspieszenia kątowego:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{250 \text{ obr/min}}{5 \text{ s}} = \frac{26,2 \text{ rad/s}}{5 \text{ s}} = 5,24 \text{ rad/s}^2$$

$$\text{bo } \Delta\omega = 250 \frac{\text{obr}}{\text{min}} \cdot 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{obr}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 26,2 \text{ rad/s}$$

Prędkość kątowa maleje od wartości $26,2 \text{ rad/s}$ do zera czyli $\Delta\omega = -26,2 \text{ rad/s}$.

$$\Delta t = \frac{\Delta\omega}{\langle \varepsilon \rangle} = \frac{-26,2 \text{ rad/s}}{-87,3 \text{ rad/s}^2} = 0,3 \text{ s}$$

Przy rozpędzaniu koła przyspieszenie jest małe i trzeba 5 sekund na rozpędzenie koła, przy hamowaniu przyspieszenie jest większe i prędkość kątowa szybciej maleje do zera.

Przykład – wirówka

Wirówka o promieniu 20 cm obracająca się w lewo zwalnia ze stałym przyspieszeniem kątowym od maksymalnej prędkości obrotowej wynoszącej 10 000 obr/min i zatrzymuje się po czasie 30 s. Jaka jest wartość i kierunek całkowitego przyspieszenia liniowego punktu położonego na obrzeżu wirówki w chwili $t=29$ s?

Rozwiązanie: Przyspieszenie kątowe:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0 - 10^4 \cdot \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s}}{30 \text{ s}} = -34,9 \text{ rad/s}^2$$

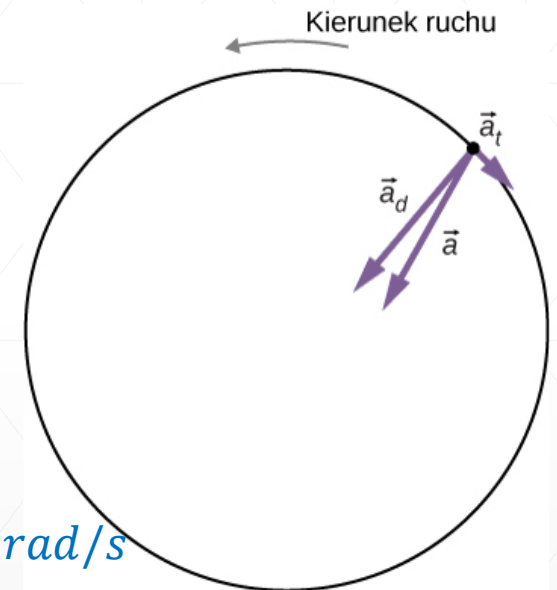
$$a_t = r \cdot \varepsilon = 0,2 \text{ m} \cdot \left(-34,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right) = -7 \text{ m/s}^2$$

Prędkość kątowa w chwili $t = 29$ s

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t = 10^4 \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} + \left(-34,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right) \cdot 29 \text{ s} = 35,1 \text{ rad/s}$$

$$v_t = r \cdot \omega = 0,2 \text{ m} \cdot 35,1 \text{ rad/s} = 7 \text{ m/s}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_d^2} = \sqrt{7^2 + 245^2} = 245,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



$$a_d = \frac{v_s^2}{r} = \frac{\left(7 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,2 \text{ m}} = 245 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Wartość przyspieszenia stycznego jest znacznie mniejsza od dośrodkowego

Przemieszczenie kątowe

Wyznamy zależność przemieszczenia kątowego $\Delta\theta$ w zależności od wartości przyspieszenia kątowego ε i zmiany prędkości kątowych ω w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

Czas wyznaczamy z wyrażenia na prędkość kątową $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \Delta\theta = \omega_0 \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\varepsilon \left(\frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} \right)^2$$

$$\Delta\theta = \frac{2\omega_0\omega - 2\omega_0^2}{2\varepsilon} + \frac{\omega^2 - 2\omega\omega_0 + \omega_0^2}{2\varepsilon} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}$$

stąd związek prędkości kątowej z drogą kątową i przyspieszeniem kątowym:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\Delta\theta\varepsilon$$

Kinematyka ruchu obrotowego

Opis ruchu **obrotowego jednostajnie przyspieszonego** jest podobny do opisu ruchu postępowego tylko wielkości liniowe zastępujemy kątowymi:

Wielkość	Ruch postępowy	Ruch obrotowy
położenie ciała	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$
prędkość chwilowa	$v = v_0 + a t$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
przyspieszenie	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
przemieszczenie	$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$	$\Delta \theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}$

Równania kinetyczne dla ruchu postępowego i obrotowego

Podsumowanie

- **ruch mechaniczny** – zmiana położenia ciała w przestrzeni i czasie
- **w ruchu krzywoliniowym** występuje przyspieszenie styczne i normalne
- **rzuty**: poziomy i ukośny
- **ruch po okręgu** – opis w układzie kartezjańskim i biegunowym
- porównanie wielkości opisujących ruch postępowy i obrotowy

Wielkość	Ruch postępowy	Ruch obrotowy
położenie ciała	$\vec{r} = (x, y, z)$	$\vec{r} = (r, \theta)$
prędkość chwilowa	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$
przyspieszenie	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
przyspieszenie styczne i normalne	$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega^2 \cdot \vec{r}$	



Dziękuję za uwagę