



**Proszę o uwagę**

# 10. Pola zachowawcze na przykładzie pola grawitacyjnego

---

- pola sił,
- potencjał,
- energia potencjalna,
- pole grawitacyjne,
- I i II prędkość kosmiczna,
- prawa Keplera.



# Definicja pola

- **Pole matematyczne** – to funkcja, która każdemu punktowi przestrzeni przypisuje daną wielkość:
  - przestrzenny rozkład liczb (**pole skalarne**)
  - rozkład wektora (**pole wektorowe**)
- **Pole fizyczne** – przestrzenny rozkład wielkości fizycznej
  - w przestrzeni określone jest pewne pole, jeżeli każdemu punktowi przestrzeni przypisano pewną wielkość fizyczną
  - pola matematyczne służą do opisu wielkości fizycznych
  - **pola fizyczne skalarne**, np. pole termiczne
  - **pola fizyczne wektorowe**, np. pole grawitacyjne
- Analiza pola sprowadza się do badania rozkładu pola, określenia wielkości charakteryzujących pole oraz formułowania związków między nimi

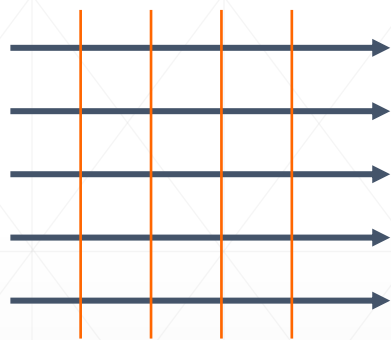
# Geometria pola

- pole przestrzenne
- pole płaskie
  - skalarne – określone dla punktów płaszczyzny
  - wektorowe – wektory leżą w jednej płaszczyźnie
- pole centralne – kierunki wektorów przechodzą przez centrum (środek), a wartości zależą od odległości
  - dośrodkowe
  - sferyczne
  - kołowe
- pola źródłowe lub bezźródłowe
- pola wirowe lub bezwirowe

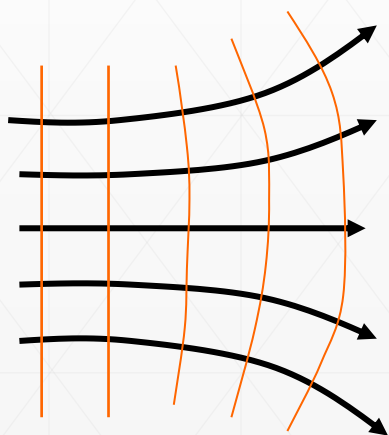
# Wielkości charakteryzujące pole: izopowierzchnie i linie pola

**Izopowierzchniami** nazywamy powierzchnie stałych wartości funkcji pola (siły, natężeń)

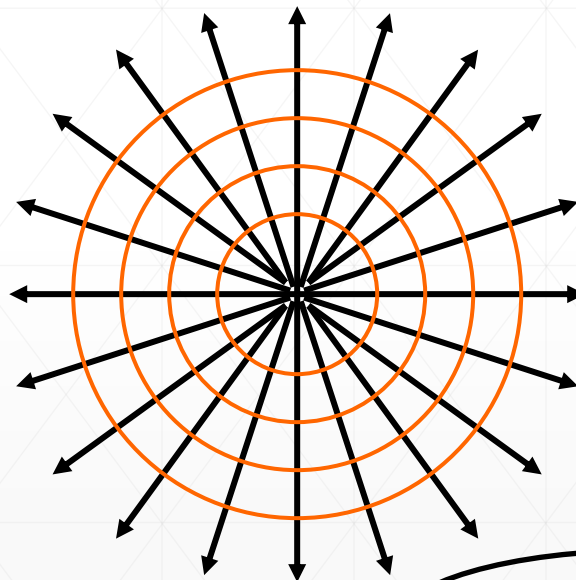
**Liniami pola** wektorowego nazywamy linie wyznaczające kierunek pola (wektor siły jest zawsze styczny do linii pola)



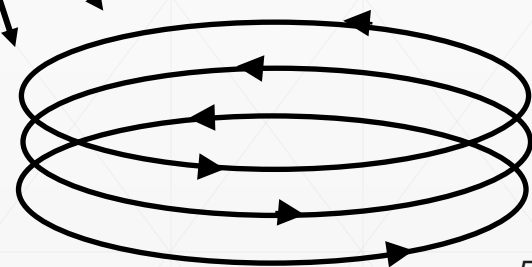
pole jednorodne



pole niejednorodne



pole centralne



pole wirowe

# Strumień pola „ilość” linii sił przechodzących przez daną powierzchnię prostopadle do niej

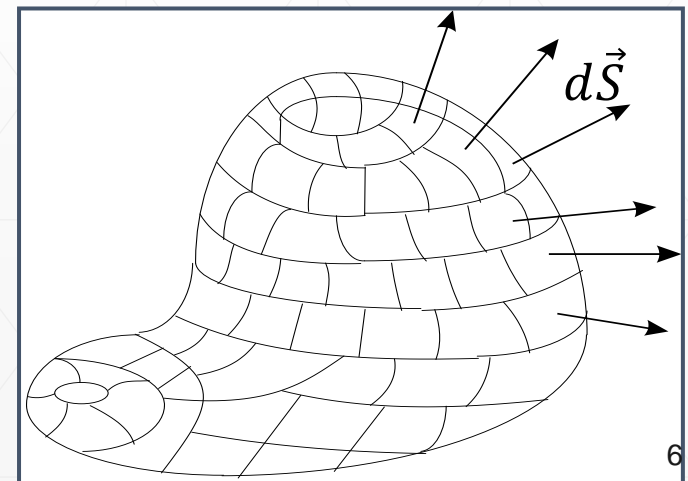
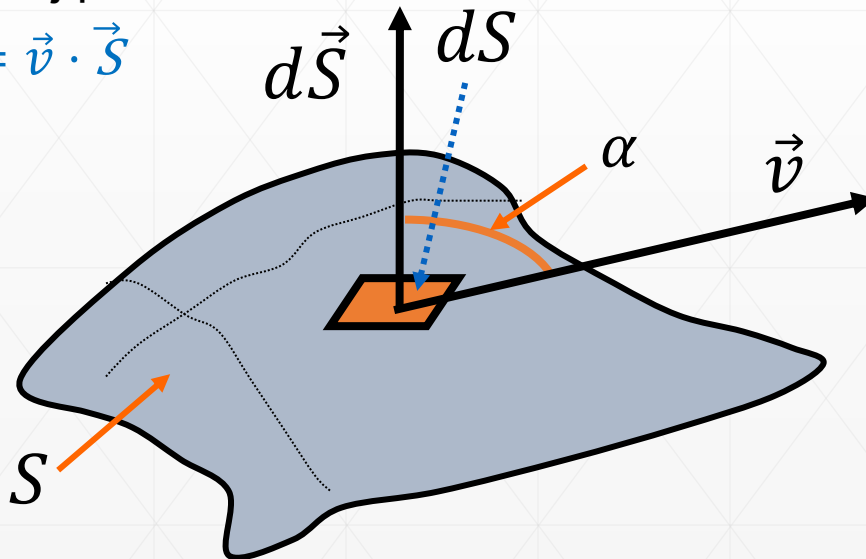
Strumień wielkości wektorowej  $\vec{v}$  przez powierzchnię  $S$  jest równy sumie strumieni  $d\Phi$  przez elementy powierzchni  $d\vec{S}$  będące iloczynem składowej normalnej wektora  $\vec{v}$  przez pole powierzchni  $dS$

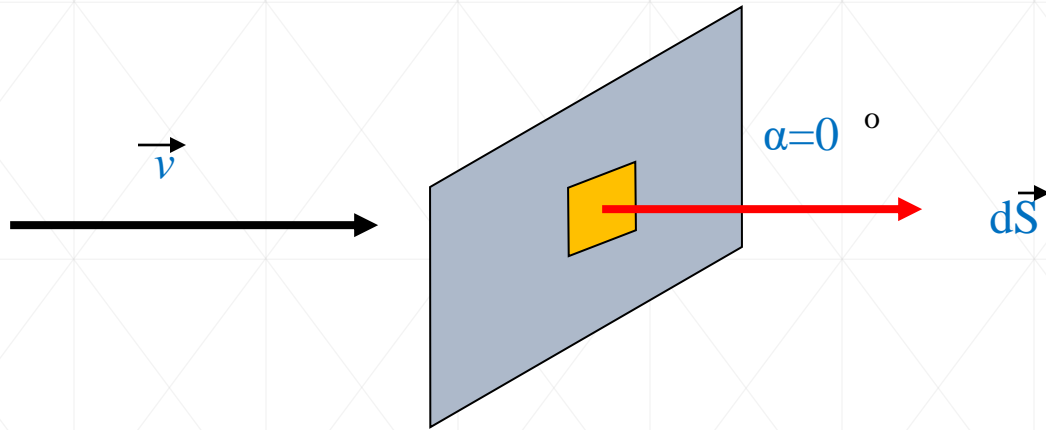
$$d\Phi = \vec{v} \cdot d\vec{S} = v \cos \alpha dS \quad \Phi = \sum_{i=1}^n d\Phi_i = \int_S d\Phi$$

$$\Phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Dla pola jednorodnego i płaskiej powierzchni

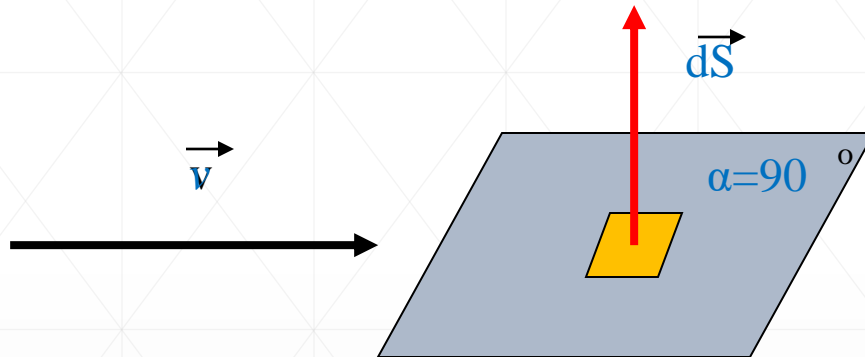
$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{S}$$



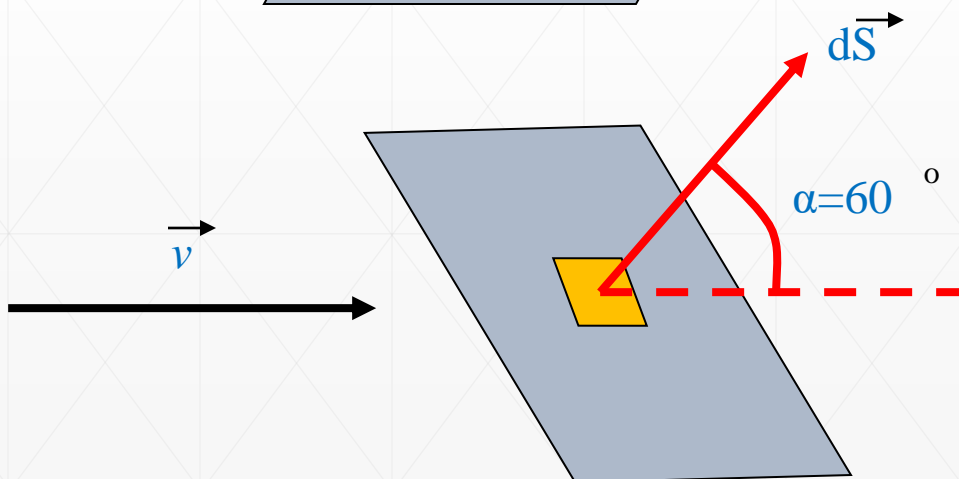


$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{S}$$

$$\Phi = v S$$



$$\Phi = 0$$



$$\Phi = \frac{1}{2} v S$$

# Pole potencjalne

Potencjał skalarny to pole skalarne określające dane pole wektorowe

- Jeżeli dla danego pola wektorowego  $\vec{F}$  istnieje pole skalarne  $V(\vec{r})$  takie, że w każdym punkcie  $\vec{r}$  jego gradient jest równy wektorowi danego pola ze zmienionym zwrotem to pole  $\vec{F}$  nazywamy polem potencjalnym, a  $V(\vec{r})$  jego potencjałem.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x}, \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y}, \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z}\right)$$

- gdzie  $\nabla$  - operator Nabla  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
- Pole wektorowe posiada potencjał, jeżeli jego rotacja zeruje się w każdym punkcie  $\vec{r}$  tego pola (pole bezwirowe)

$$\text{rot } \vec{F}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$$

- Dywergencja pola (rozbieżność, źródłowość)

$$\text{div } \vec{F}(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$



# Rodzaje pól siłowych

**Pole siłowe** – przestrzeń, w której występuje siła  $\vec{F} = \vec{f}(\vec{r}, t)$  charakteryzująca dane oddziaływanie.

- pola stacjonarne (np. grawitacyjne) - pola niezależne od czasu -  $\vec{F} = \vec{f}(\vec{r})$
- pola niestacjonarne (np. elektromagnetyczne) – pola zależne od czasu
- pole potencjalne – jeśli istnieje potencjał skalarny –  $(\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = 0)$
- pole zachowawcze, gdy potencjał skalarny nie zależy od czasu i pole jest centralne
  - pole grawitacyjne
  - pole sprężystości
  - pole elektrostatyczne
- dla zachowawczych pól siłowych potencjałem skalarnym jest energia potencjalna  $V(\vec{r}) = U(\vec{r})$

# Siły zachowawcze

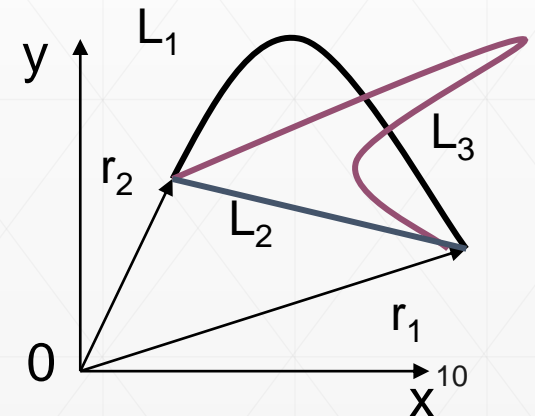
## Siły zachowawcze

- zależą tylko od położenia punktu
- mogą być reprezentowane przez funkcję energii potencjalnej

$$U(r) = - \int_{r_{zer}}^r \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

## Dla sił zachowawczych

- praca sił pomiędzy dwoma punktami **nie zależy** od wyboru drogi, a tylko od położenia końcowego i początkowego punktu
- praca po drodze zamkniętej jest równa zero
- pole w którym działają siły zachowawcze nazywamy **polem zachowawczym**



# Podział pól siłowych

Podział wynika z czterech fundamentalnych oddziaływań siłowych:

- *Oddziaływania grawitacyjnego,*
- *Oddziaływania elektromagnetycznego,*
- *Słabego oddziaływania jądrowego,*
- *Silnego oddziaływania jądrowego*

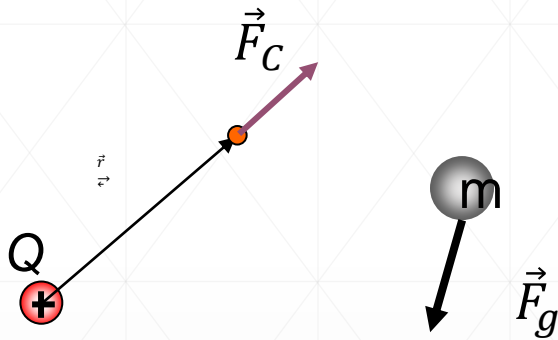
- pola grawitacyjne
  - źródła i obiekty – ciała posiadające masę ( $m$ )
- pola elektromagnetyczne
  - ładunki w spoczynku ( $q$ ) – pola elektryczne
  - ładunki w ruchu ( $q$ ) – pola magnetyczne
- pola jądrowe
  - źródła – cząstki jądrowe (elementarne) podlegające oddziaływaniom silnym lub słabym ( $q$ )
- miarą ilościową pola siłowego jest jego natężenie

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

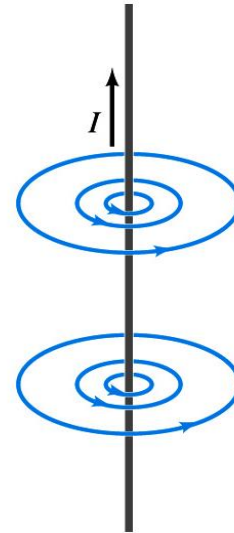
gdzie  $m$ ,  $q$  masa lub ładunek ciała próbnego – małego obiektu nie zakłócające pola sił

# Przykłady pól siłowych

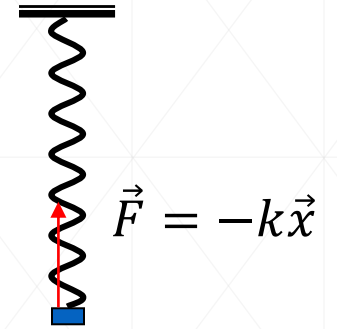
pole elektrostatyczne



pole grawitacyjne



pole magnetyczne



pole sprężyste

# Pole grawitacyjne

- Prawo powszechnego ciążenia (prawo grawitacji) sformułowane przez Newtona:

Dwa punkty materialne o masach  $m_1$  i  $m_2$  przyciągają się wzajemnie siłą proporcjonalną do iloczynu tych mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi

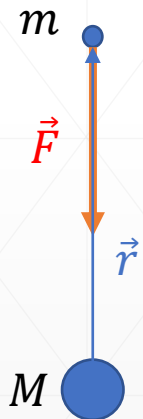
$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

Współczynnik  $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kgs}^2$   
to stała grawitacji

- Niech  $M = m_1$  jest dużą masą wytwarzającą pole grawitacyjne, a  $m = m_2$  niewielką masą próbną. Siła działająca na masę próbną umieszczoną w odległości  $r$  od masy  $M$  wyraża się wzorem

$$\vec{F} = -\frac{GMm\vec{r}}{r^2 r}$$

- znak minus oznacza, że wektor  $\vec{r}$  ma przeciwny zwrot niż wektor  $\vec{F}$
- Masa  $M$  wytwarza w swym otoczeniu pole grawitacyjne, a istniejące pole działa na masę próbną  $m$  siłą  $F$  ( $m \ll M$ )



# Przyspieszenie ziemskie $g$

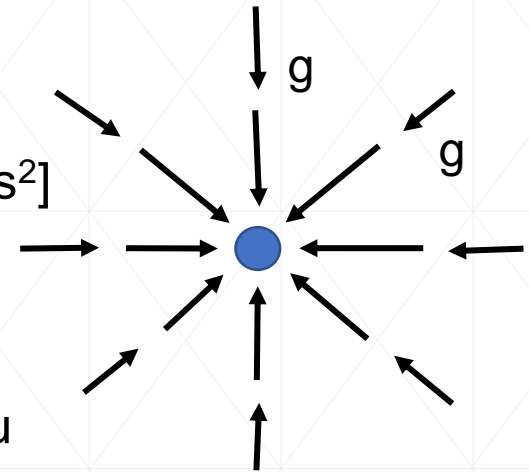
- Miarą ilościową pola grawitacyjnego jest jego natężenie  $\vec{E}$  – równe liczbowo sile działającej na jednostkową masę próbną :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

- Wektor  $\vec{E}$  wyraża się w jednostkach przyspieszenia [ $\text{m/s}^2$ ]

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{a}_g$$

- W przypadku pola grawitacyjnego Ziemi natężenie pola  $E$  jest równe przyspieszeniu grawitacyjnemu  $g$  pochodzącemu wyłącznie od siły grawitacji.
- Wartość  $a_g$  zależy od wysokości nad powierzchnią Ziemi
  - Na powierzchni Ziemi ( $h = 0 \text{ km}$ )  $g = 9,83 \text{ [m/s}^2]$
  - Na szczycie Mt. Everestu ( $h = 8,8 \text{ km}$ )  $g = 9,80 \text{ [m/s}^2]$
  - Na orbicie kosmicznej ( $h = 400 \text{ km}$ )  $g = 8,70 \text{ [m/s}^2]$
- Wartość przyspieszenia ziemskiego  $g$  różni się od  $a_g$  w różnych punktach powierzchni Ziemi bo
  - Ziemia nie jest jednorodna ani kulista
  - Ziemia obraca się, przyspieszenie na równiku jest mniejsze niż na biegunach



$$g = a_g - \omega^2 r$$

# Masa i ciężar ciała

- Masa jest miarą ilości materii w danym ciele, ale trudno ją zdefiniować. Masa ciała jest jego cechą, która wiąże siłę przyłożoną do ciała z uzyskiwanym przez nie wówczas przyspieszeniem.

$$m = \frac{\vec{F}}{\vec{a}}$$

$$\frac{m_x}{m_0} = \frac{a_0}{a_x}$$

- Ciężar ciała jest równy wartości bezwzględnej siły ciężkości działającej na to ciało.

$$W = mg$$

- Ważenie ciał to wyznaczanie jego ciężaru.
- Definiujemy ciężar jako wynik działania pola grawitacyjnego na ciało w nim się znajdujące.

Ciężar kuli do kręgli o masie 7,2 kg to na Ziemi 71 N, a na Księżycu 12 N.

# Energia pola grawitacyjnego

**Pole grawitacyjne jest polem zachowawczym** (pole potencjalne)

**Energia potencjalna pola grawitacyjnego** – nagromadzona w danym punkcie pola zdolność do wykonywania pracy. Praca jaka musi być wykonana by przenieść daną masę z nieskończoności do danego punktu pola.

$$E_p = E_p(r) - E_p(\infty) = -W_{\infty \rightarrow r} = - \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^r \frac{GMm}{r^2} \cdot dr = -\frac{GMm}{r}$$

Energia potencjalna ma wartość równą zero w nieskończoności (punkt odniesienia) i maleje w miarę zmniejszania się  $r$ . Oznacza to, że siła jest przyciągająca. Wzór ten jest prawdziwy bez względu na wybór drogi po jakiej punkt porusza się z nieskończoności do  $r$  bo siła grawitacji jest siłą zachowawczą.

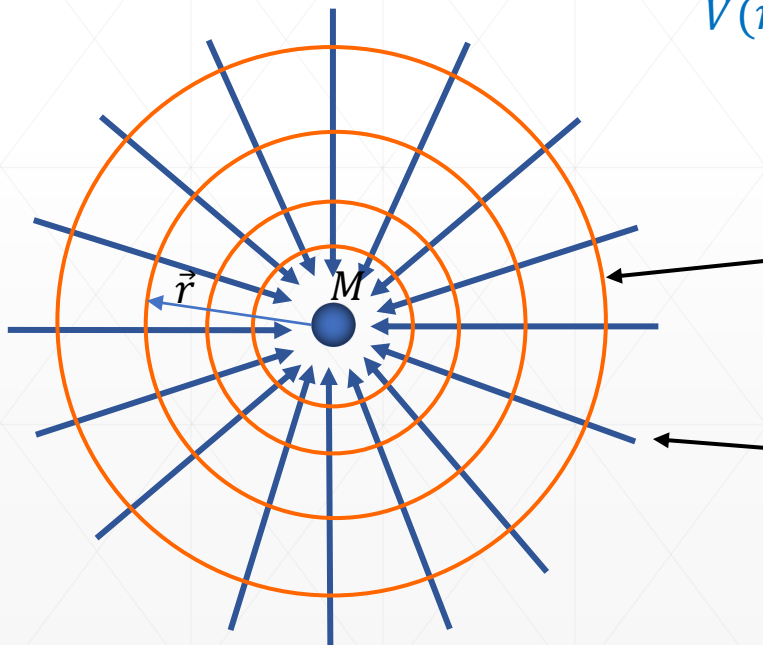


# Potencjał grawitacyjny

Wielkością skalarną charakteryzującą pole grawitacyjne jest potencjał  $V$

**Potencjał pola grawitacyjnego** – energia potencjalna jednostkowej masy próbnej w danym punkcie pola:

$$V(r) = \frac{E_p}{m} = -\frac{GM}{r}$$



**Powierzchnie ekwipotencjalne** to powierzchnie, których wszystkie punkty mają taki sam potencjał grawitacyjny.

**Linie sił** obrazujące kierunek natężenia pola są zwrócone jest ku masie M.

# Prędkości kosmiczne

Pole grawitacyjne planety stanowi swoistą „pułapkę” dla dowolnego obiektu materialnego. Jeśli chce się z niej uwolnić, to energia ciała (kinetyczna) musi być większa niż energia potencjalnego oddziaływania pola planety.

**I prędkość kosmiczna** – **pozioma** prędkość, jaką należy nadać ciału aby poruszało się ono po zamkniętej orbicie kołowej równej promieniowi planety  $R$ .

$$F_g = F_{od} \quad \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Pierwsza prędkość kosmiczna dla planety jest **największą** prędkością jaką może mieć ciało na stabilnej orbicie kołowej.

Dla Ziemi o  $M = 5,96 \cdot 10^{24}$  kg oraz  $R = 6,37 \cdot 10^6$  m więc  $v_1 = 7,9$  km/s

**II prędkość kosmiczna (prędkość ucieczki)** – jest to najmniejsza prędkość, którą trzeba nadać ciału by oddaliło się od danej planety, teoretycznie do nieskończoności. Energia w nieskończoności jest równa 0, zatem na powierzchni sumaryczna energia też musi wynosić 0:

$$E = -\frac{GMm}{R} + \frac{mv^2}{2} = 0 \quad \longrightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2}v_1$$

Dla Ziemi  
 $v_2 = 11,2$  km/s<sup>18</sup>

# Ruch w polu grawitacyjnym – prawa Keplera

*(ok. 1600 r.):*

- 1) Torami planet są elipsy. Słońce znajduje się w jednym z ognisk elipsy.
- 2) Prędkość polowa planety jest stała (promień wodzący planety zakreśla w jednakowym czasie jednakowe pola).
- 3) Stosunek kwadratów czasów obiegu dwóch planet jest równy stosunkowi trzecich potęg ich dużych półosi.

Pierwsze prawo jest szczególnym przypadkiem ruchu w polu centralnej siły grawitacyjnej.

Drugie wynika z zasady zachowania momentu pędu w polu sił centralnych.

Trzecie prawo wynika z porównania sił ciężkości i odśrodkowej.

Z praw mechaniki Newtona wynika, że trzy prawa Keplera poprawnie opisują ruch planety w układzie związanym ze Słońcem. Dokładniej: prawa Keplera mówią o układzie dwóch ciał obdarzonych masą, z których jedno ma masę zanedbywalnie małą w porównaniu z masą drugiego.

# I prawo Keplera

Wszystkie planety poruszają się po orbitach w kształcie elipsy, w której ognisku znajduje się Słońce.

Równanie toru planety we współrzędnych biegunowych

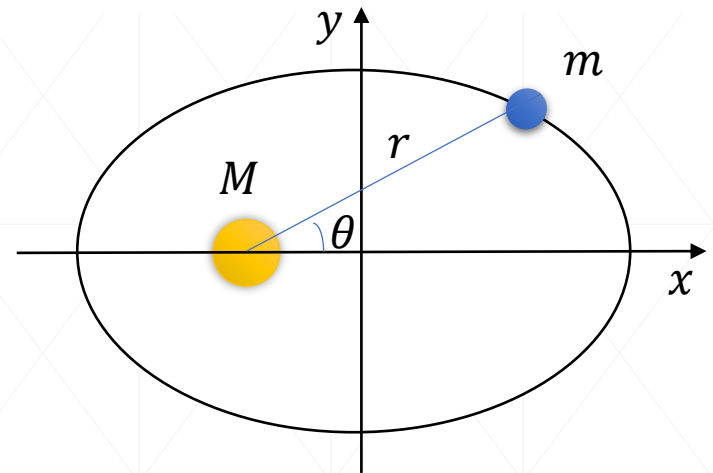
$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

gdzie

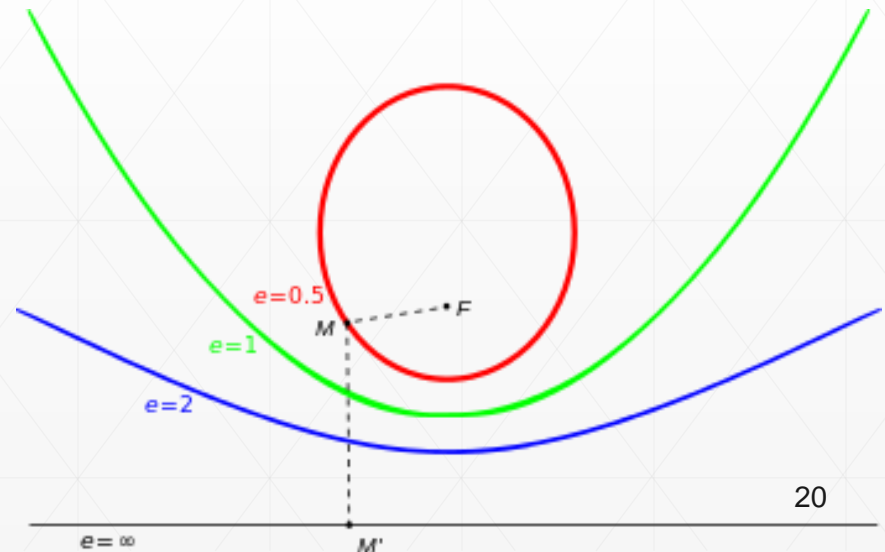
$r$  – promień wodzący,

$e$  – mimośród,

$p$  – parametr elipsy



Prawa Keplera mówią o układzie dwóch ciał z których jedno ma masę zanedbywalnie małą w porównaniu do drugiego. Gdy masy obu krążących ciał są porównywalne to każde z dwóch ciał porusza się po krzywej stożkowej, w ognisku której znajduje się środek masy całego układu.



# Energia całkowita ciała w polu grawitacyjnym

Pole grawitacyjne planety stanowi swoistą „pułapkę” dla dowolnego obiektu materialnego. Jeśli chce się z niej uwolnić, to energia ciała (kinetyczna) musi być większa niż energia potencjalnego oddziaływania pola planety.

## Energia potencjalna pola grawitacyjnego

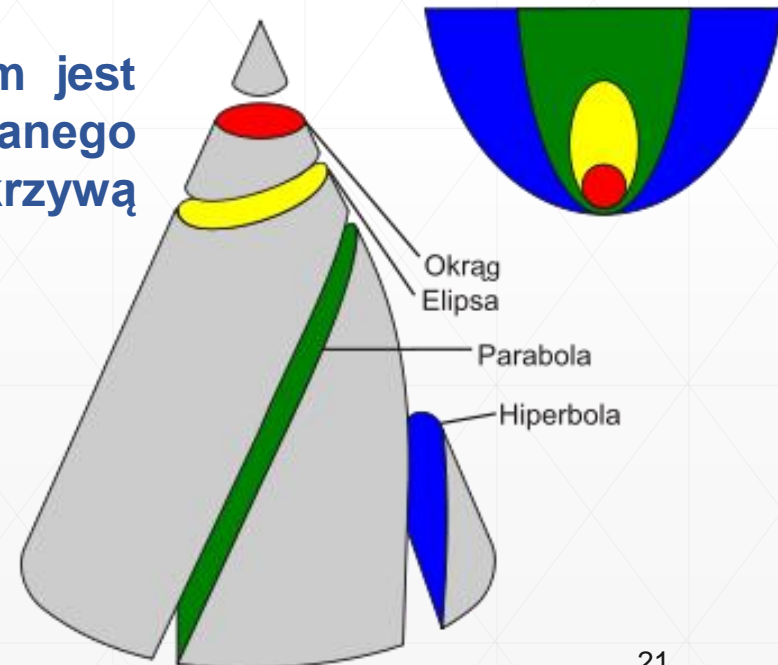
$$E_{pr} = -\frac{GMm}{r} < 0$$

Energia całkowita ciała w polu grawitacyjnym jest zachowana i w przypadku ciała związanego grawitacyjnie jest ujemna, a orbita jest krzywą zamkniętą

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \text{const} < 0$$

W przypadku gdy energia całkowita jest dodatnia to orbita jest krzywą otwartą – dla  $E = 0$  – parabola, a dla  $E > 0$  – hiperbola. Mniejsze ciało porusza się na tyle szybko, że zbliży się do drugiego ciała tylko jednokrotnie

Ciała poruszają się po orbitach stożkowych.



# II prawo Keplera

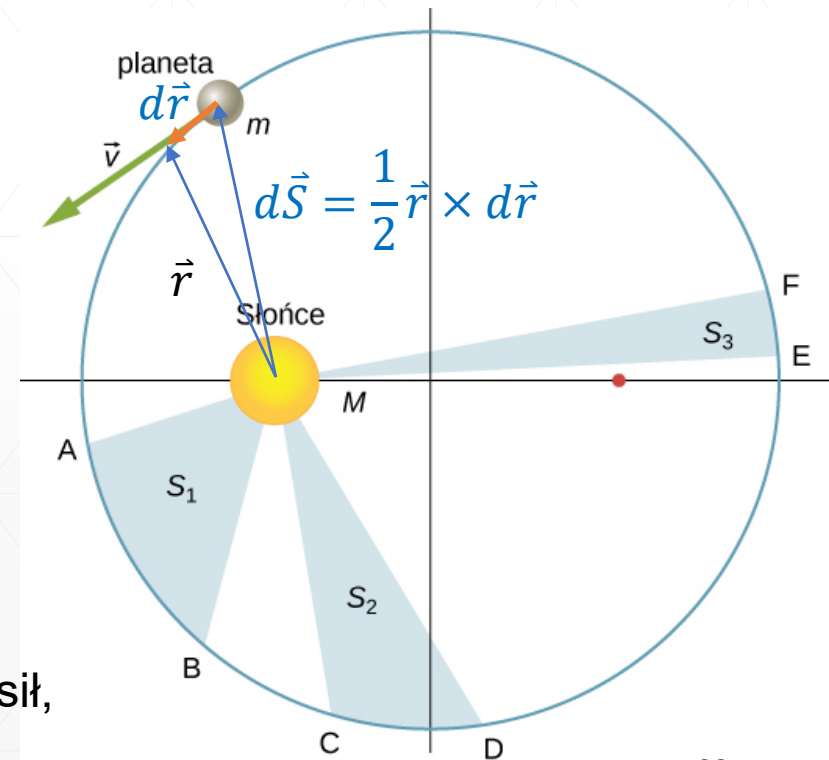
Prędkość polowa planety jest stała  
(promień wodzący planety zakreśla w jednakowym czasie jednakowe pola).

Prawo to stwierdza, że dla dowolnej krzywej stożkowej:

$$\vec{v}_s = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\vec{r}}{dt} \times d\vec{r} + \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \underbrace{\vec{v} \times d\vec{r}}_{=0} + \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2m} \vec{r} \times m\vec{v} = \frac{\vec{L}}{2m} = \text{const}$$

gdzie:  $v_s$  jest prędkością polową,  $d\vec{S}$  jest wektorem powierzchni o wartości pola zakreślanego w czasie  $dt$  przez promień wodzący o początku w ognisku elipsy,  $\vec{L}$  - moment pędu planety.

Powyższą zależność jest przejawem działania zasady zachowania momentu pędu planety. Siła grawitacyjna, jako oddziaływanie centralne, w układzie podwójnym nie wywołuje momentów sił, zatem moment pędu układu zostaje zachowany.



# III prawo Keplera

Stosunek kwadratów czasów obiegu dwóch planet jest równy stosunkowi trzecich potęg ich dużych półosi.

Porównując siłę odśrodkową z siłą grawitacji dla orbity kołowej otrzymujemy:

$$F_g = F_{od}$$

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r = \frac{m4\pi^2 r}{T^2}$$

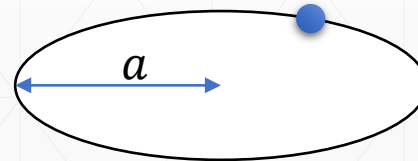
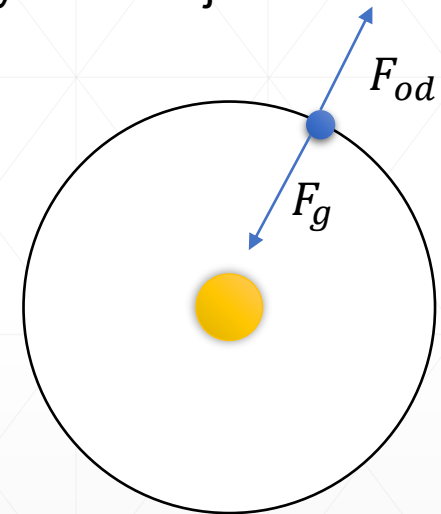
stąd

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

W przypadku ruchu po elipsie

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = const \quad \text{lub}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$



# Podsumowanie

## Pojęcie pola

- Pole to nowoczesny sposób na przedstawianie oddziaływań w fizyce
- Wielkości charakteryzujące pola to: natężenie, energia potencjalna oraz potencjał pola.
- Pola zachowawcze to pola w których praca nie zależy od drogi a jedynie od początkowego i końcowego położenia ciała.

## Prawo powszechnego ciążenia

- Wszystkie ciała przyciągają się ku sobie dzięki sile grawitacji, która jest wprost proporcjonalna do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości pomiędzy nimi.

## Grawitacja przy powierzchni Ziemi

- Ciężar ciała wynika z przyciągania grawitacyjnego między Ziemią a tym ciałem.
- Pole grawitacyjne jest reprezentowane przez linie pola grawitacyjnego. Określają one kierunek siły grawitacji, a odległość między liniami określa natężenie pola grawitacyjnego.

## Prawa Keplera

- Wszystkie ciała poruszają się po orbitach będących krzywymi stożkowymi. Orbits ciał związanych grawitacyjnie są krzywymi zamkniętymi i mają kształt okręgu lub elipsy, a orbits ciał niezwiązanych grawitacyjnie są krzywymi otwartymi i mają kształt paraboli lub hiperboli.
- Prędkość polowa ciała na dowolnej orbicie jest stała, co odzwierciedla zasadę zachowania momentu pędu.
- Kwadrat okresu obiegu planety wokół gwiazdy po orbicie eliptycznej jest proporcjonalny do sześciangu długości półosi wielkiej tej orbity.





**Dziękuję za uwagę**