



Proszę o uwagę

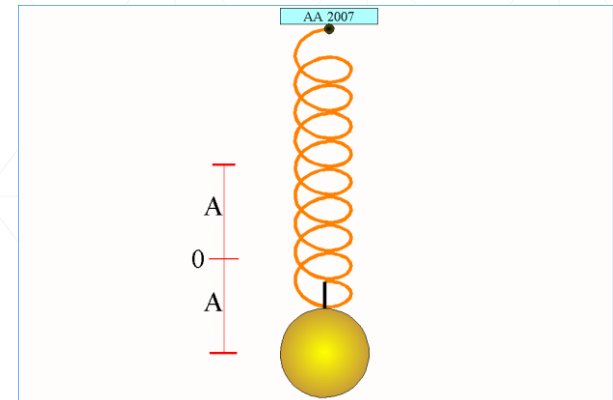
13. Drgania swobodne

- pojęcie drgań
- drgania harmoniczne
- drgania swobodne
- energia drgań
- składanie drgań harmonicznnych
- dudnienie



Podstawowe definicje

- **drgania** – procesy, w których dana wielkość fizyczna na przemian rośnie i maleje
- **drgania swobodne** – gdy układ, na który nie działają zmienne siły zewnętrzne, zostanie wyprowadzony z położenia równowagi
- **okresowy ruch drgający (periodyczny)** – jeżeli wartości wielkości fizycznych zmieniające się podczas drgań, powtarzają się w pewnych odstępach czasu
- **drgania harmoniczne** – gdy przyspieszenie układu jest proporcjonalne do przemieszczenia i skierowane w kierunku położenia równowagi (wykres drgań opisany jest wówczas funkcją trygonometryczną *sin* lub *cos*)
- **oscylator harmoniczny** – układ wykonujący drgania harmoniczne np. wahadło, obwód LC



Okres i częstotliwość drgań

- **okres (ang. period)**, oznaczamy T – czas wykonania jednego pełnego drgania (jedn. sekunda [s])
- **częstotliwość drgań (ang. frequency)**, oznaczamy f – liczba drgań (oscylacji) w jednostce czasu (jedn. herc [Hz])
- zależność między częstotliwością i okresem:

$$f = 1/T$$

$$\text{stąd } 1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$$

- **częstość kątowna (kołowa)**, oznaczamy ω – jak szybko powtarza się dane zjawisko okresowe
- zależności między ω , a częstotliwością f i okresem T wynoszą:

$$\omega = 2\pi/T$$

$$\omega = 2\pi f$$

- dla drgań swobodnych przyjmujemy oznaczenia z indeksem 0

$$\omega_0, \quad T_0, \quad f_0$$

Charakterystyka ruchu harmonicznego

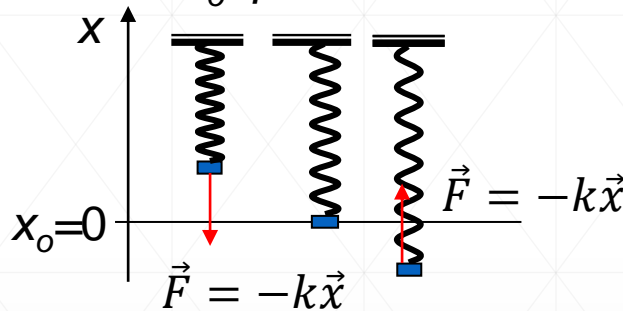
Rozpatrzmy ruch masy m zawieszonyj na sprężynie o stałej sprężystości k .
W tym przypadku siła wypadkowa F jest proporcjonalna do wychylenia i skierowana w kierunku położenia równowagi: $F = -k(x - x_0)$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$$

$$F = -k x$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x$$

k – stała sprężystości
 x_0 – położenie równowagi

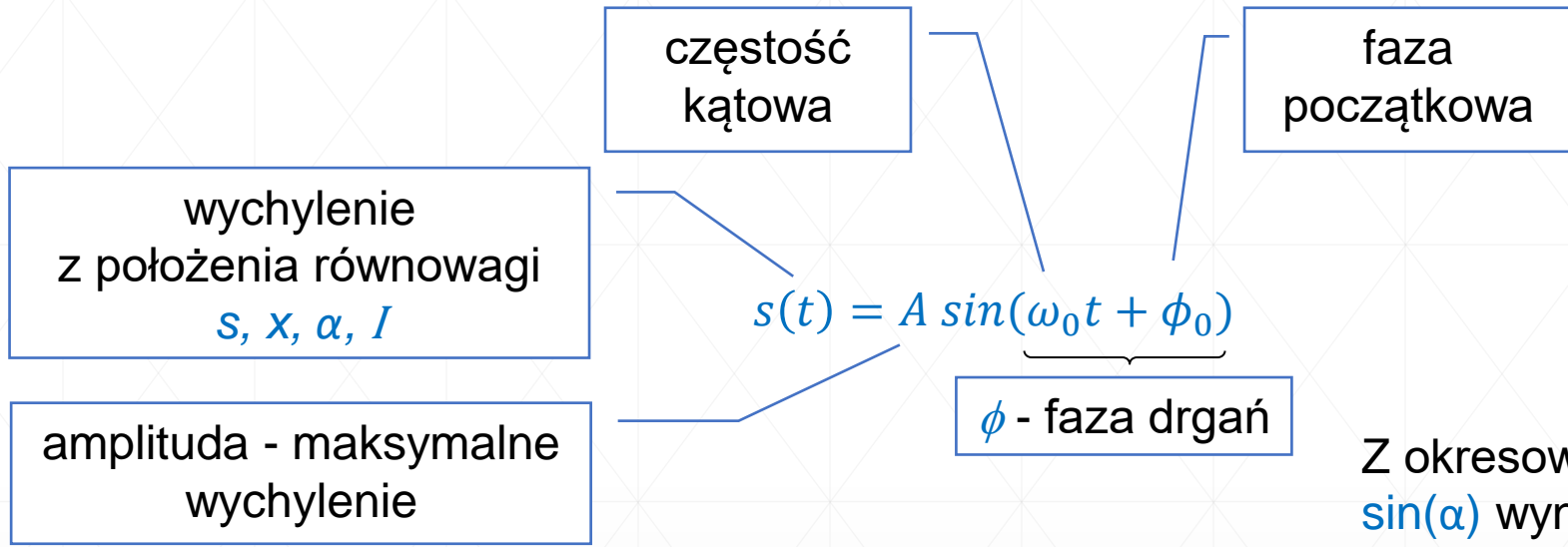


$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x \quad \longleftrightarrow \quad \text{ozn. } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe drgań harmonicznjch, którego rozwiązanie to:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \phi_0)$$

Swobodny oscylator harmoniczny



Z okresowości funkcji $\sin(\alpha)$ wynika:

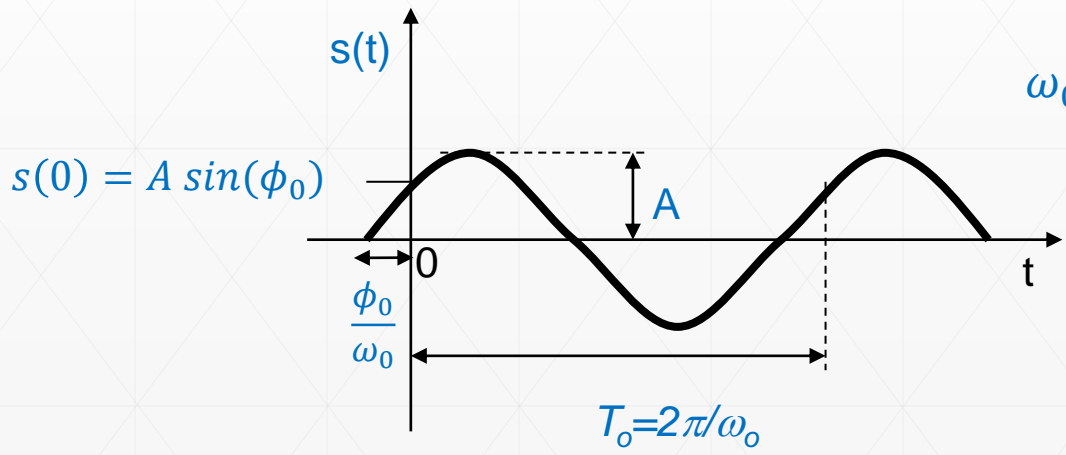
$$\phi(t + T_0) = \phi(t) + 2\pi$$

$$\omega_0(t + T_0) + \phi_0 = \omega_0 t + \phi_0 + 2\pi$$

$$\omega_0 T_0 = 2\pi$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

T_0 – okres drgań



Rozwiązania równania różniczkowego drgań harmonicznyc

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

- równanie drgań

rozwiązanie:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0)$$

stałe A , ϕ_0 wyznaczamy z warunków początkowych

$$x(0) = x_0$$

$$x_0 = A \cos(\phi_0)$$

$$v(0) = v_0$$

$$v_0 = -A \omega_0 \sin(\phi_0)$$

stąd:

$$\operatorname{tg}(\phi_0) = \frac{-v_0}{x_0 \omega_0}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

Opis drgań przy pomocy liczb zespolonych:

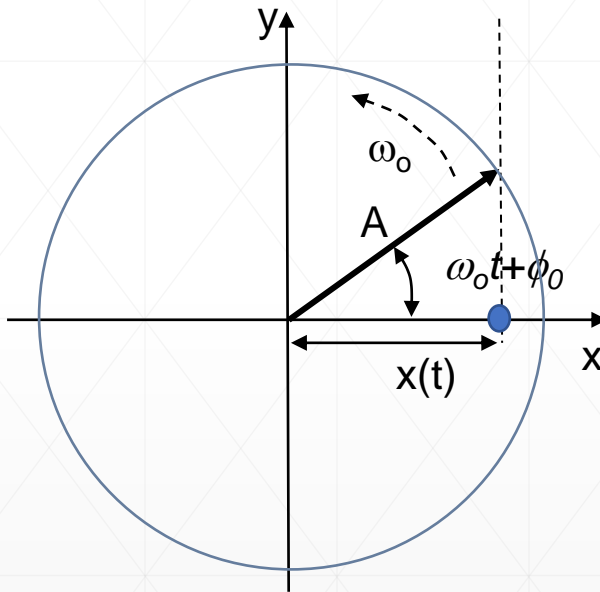
$$z = A e^{-i(\omega_0 t + \phi_0)}$$

$$z = A [\cos(\omega_0 t + \phi_0) + i \sin(\omega_0 t + \phi_0)]$$

$$x = \operatorname{Re}(z) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

Ruch harmoniczny, a ruch po okręgu

Wektor o długości A obracający się z prędkością kątową ω_0

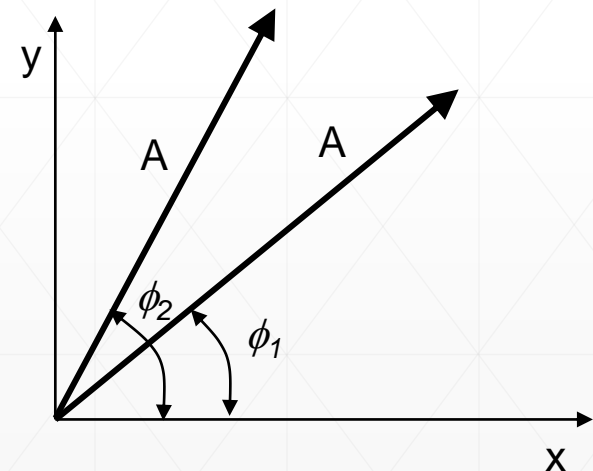


Rzut wektora A na kierunek OX :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

Metoda wykresów fazowych

Wektor o długości A równej amplitudzie drgań i kącie nachylenia do osi OX równym fazie drgań ϕ_1 . Jego położenie w czasie ulega zmianie, bo $\phi = \omega_0 t + \phi_0$



Przykład: Wahadło matematyczne

Masa punktowa m zawieszona na nierozciągliwej, nieważkiej nici o długości L

$$I\varepsilon = M$$

$$I = mL^2 \text{ – moment bezwładności}$$

$$M = -Lmg\sin\theta \text{ – moment siły}$$

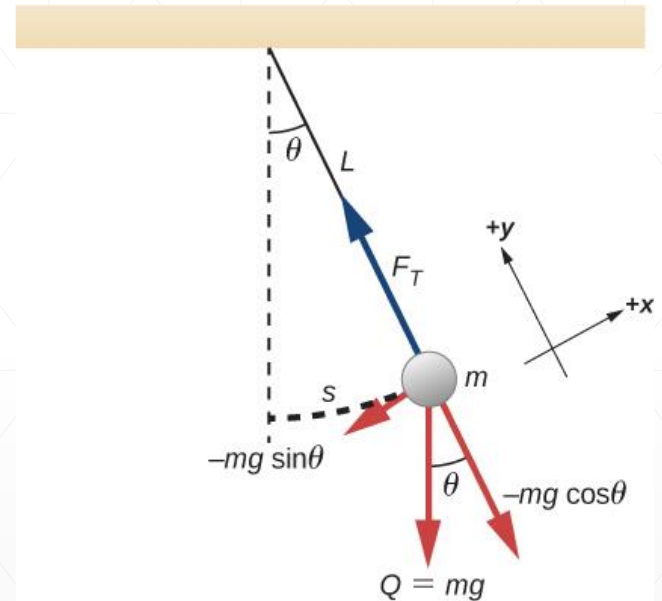
$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Lmg\sin\theta \quad \text{drgania nie są harmoniczne}$$

Dla małych kątów ($\theta < 15^\circ$) $\sin\theta \sim \theta$ $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega_o = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\theta = A \cos(\omega_o t + \phi_o)$$

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



Energia oscylatora harmonicznego

Rozpatrzmy energię żaby bujającej się na sprężynie

Energia kinetyczna

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

Energia potencjalna

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E_p = - \int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} A^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

Energia całkowita

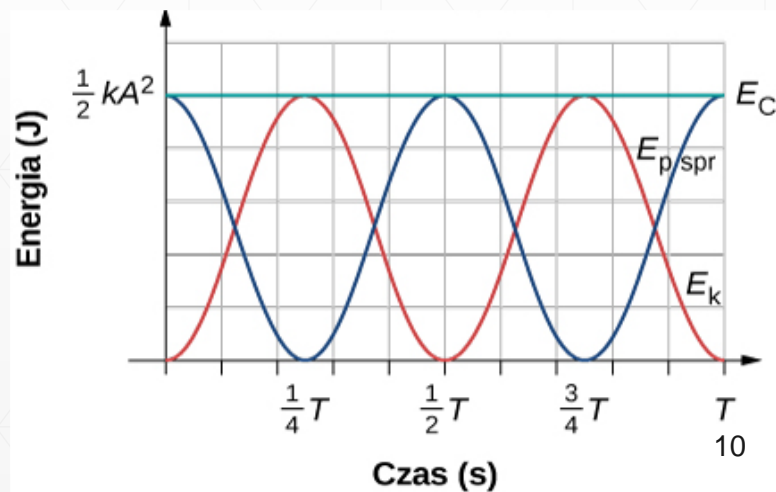
$$\begin{aligned} E_c &= E_k + E_p \\ &= \frac{kA^2}{2} (\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)) = \frac{kA^2}{2} \end{aligned}$$

Energia kinetyczna zmienia się w energię potencjalną zmagazynowaną w sprężynie

$$x = A \cos(\omega_0 t) \quad \phi_0 = 0$$

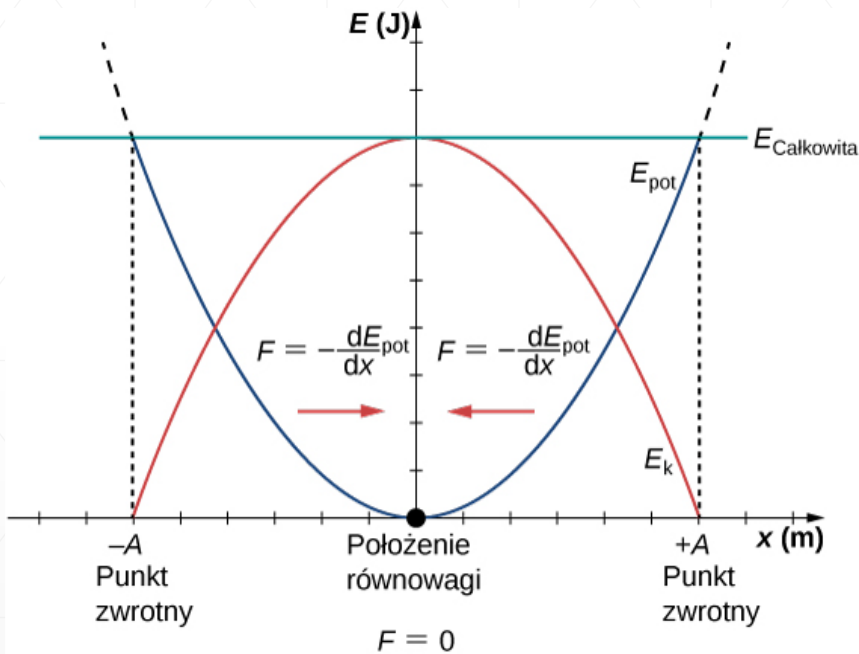
$$v = \frac{dx}{dt} = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$E_k = \frac{k}{2} A^2 \sin^2(\omega_0 t)$$



Oscylacje względem położenia równowagi

Energia oscylatora w funkcji położenia klocka

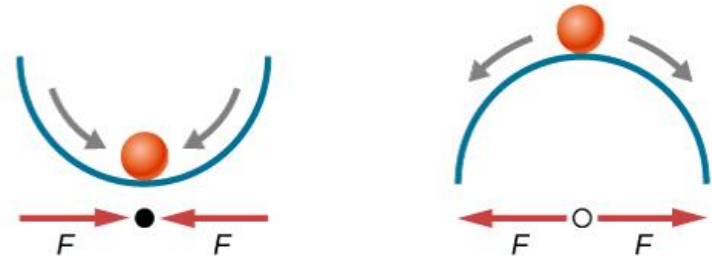


Położenie równowagi określa minimum energii potencjalnej.

Siła zwrotna F jest skierowana do położenia równowagi – równowaga trwała.

W przypadku równowagi nietrwałej drgania nie występują.

Kulka na powierzchni miski

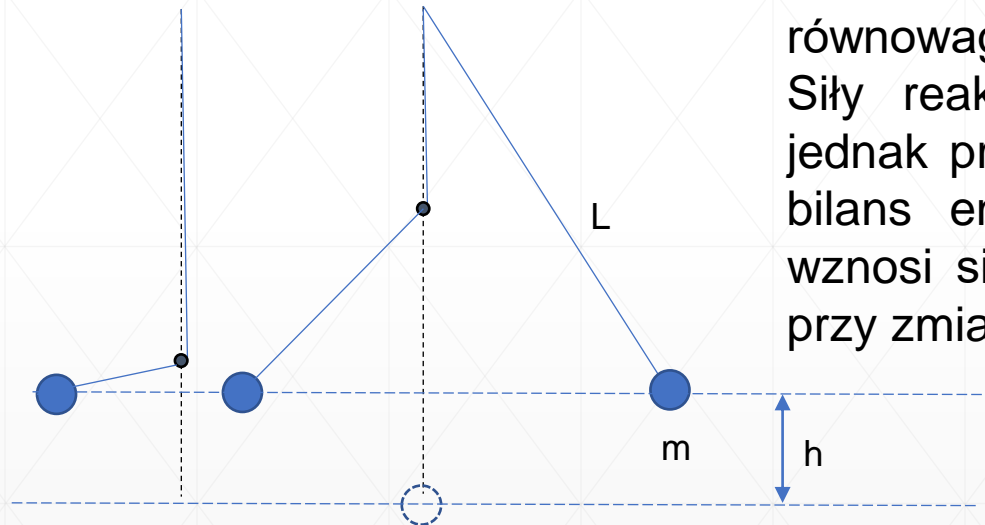


(a) Trwałe położenie równowagi

(b) Nietwałe położenie równowagi

Wahadło Galileusza

Wahadło matematyczne o masie m i długości L oraz gwóźdź w odległości x od osi obrotu



$$E_c = E_k + E_p = \text{const}$$

$$E_k = 0 \quad E_c = mgh$$

Gwóźdź wbity poniżej punktu zaczepienia wahadła powoduje, że jego długość ulega efektywnemu skróceniu przy przejściu położenia równowagi.

Siły reakcji więzów nie wykonują jednak pracy – nie mają wpływu na bilans energii. Wysokość na jaką wznosi się wahadło nie zmienia się przy zmianie długości nici:



Składanie drgań o jednakowych częstościach metoda wykresów fazowych

Rozpatrzmy dwa drgania o różnych amplitudach i przesunięciach fazowych:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2)$$

W wyniku superpozycji otrzymujemy drganie o amplitudzie A i przesunięciu fazowym ϕ :

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

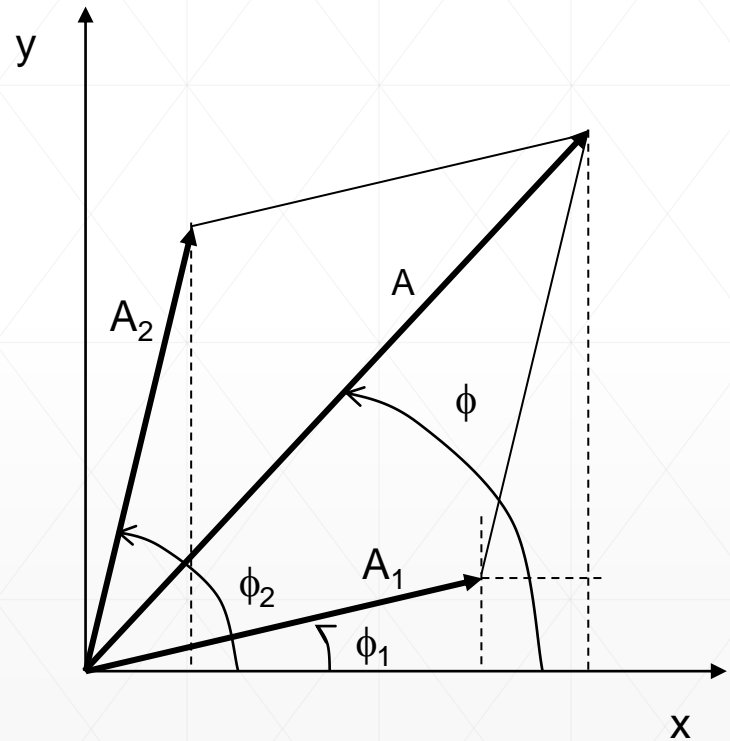
Amplitudę określamy z prawa cosinusów:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\phi_2 - \phi_1)]$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)$$

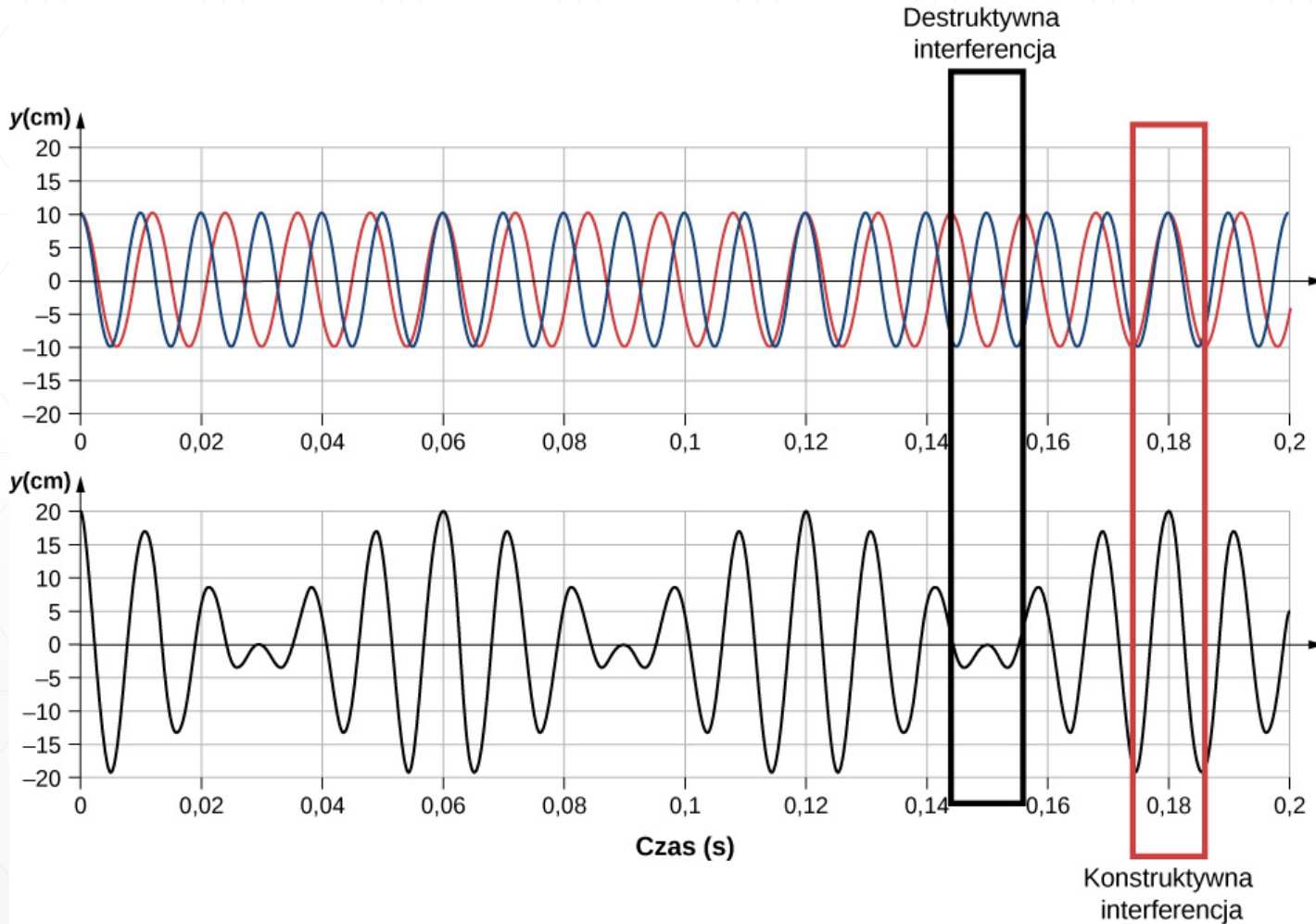
Przesunięcie fazowe z tangensa kąta:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$$



Dudnienia

złożenie dwóch drgań równoległych
nieznacznie różniących się częstotliwościami



$$x_1 = A \cos \omega_1 t$$

$$x_2 = A \cos \omega_2 t$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

$$x = 2A \cos\left(\frac{1}{2}\omega_{dud} t\right) \cos(\omega_{\acute{s}r} t)$$

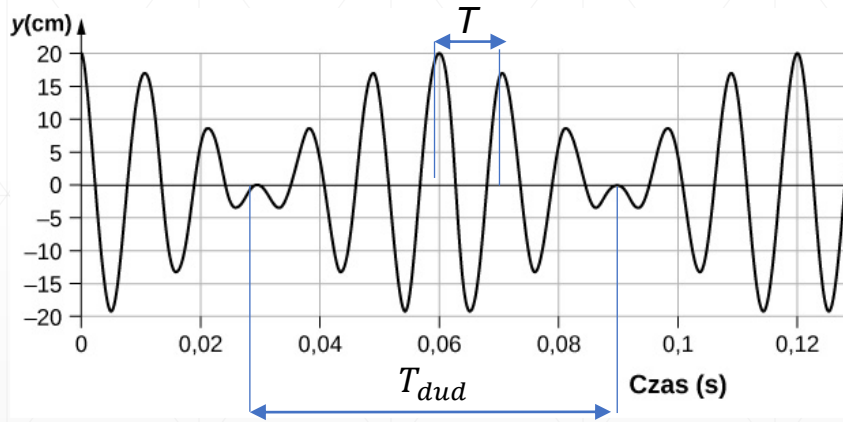
$$\omega_{\acute{s}r} = \frac{1}{2}|\omega_1 + \omega_2|$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{\acute{s}r}}$$

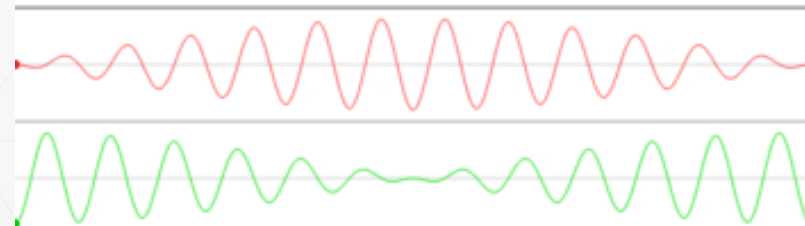
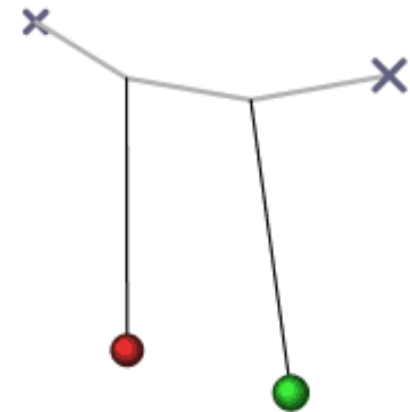
$$A_{dud} = \left| 2A \cos\left(\frac{1}{2}\omega_{dud} t\right) \right|$$

$$\omega_{dud} = |\omega_2 - \omega_1|$$

$$T_{dud} = \frac{2\pi}{\omega_{dud}}$$



drżania
często



Składanie drgań wzajemnie prostopadłych

o jednakowych częstościach i różnych fazach

$$x = A \cos \omega t$$

$$y = B \cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{x}{A} = \cos \omega t \quad ; \quad \frac{y}{B} = \cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi$$

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - (\cos \omega t)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \phi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \phi$$

dla $\phi = 0$

$$\cos \phi = 1, \quad \sin \phi = 0$$

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = 0$$

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

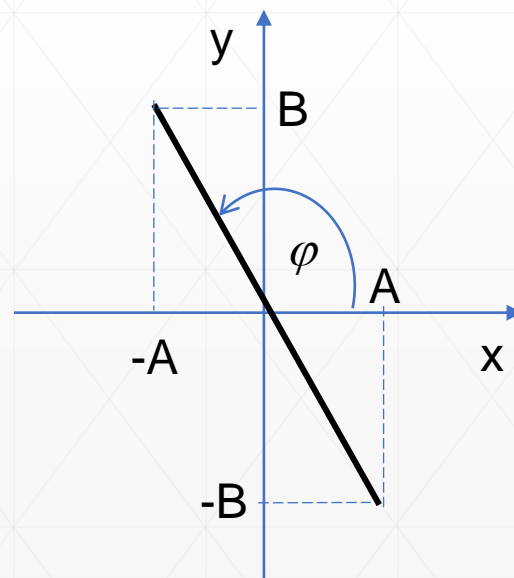
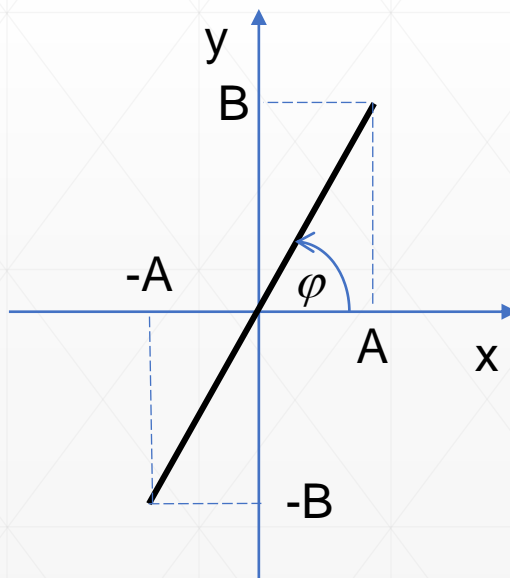
$$y = \frac{B}{A}x$$

równanie prostej

dla $\phi = \pi$

$$\cos \phi = -1, \quad \sin \phi = 0$$

$$y = -\frac{B}{A}x$$



Składanie drgań wzajemnie prostopadłych

o jednakowych częstościach i różnych fazach

$$x = A \cos \omega t$$

$$y = B \cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{x}{A} = \cos \omega t \quad ; \quad \frac{y}{B} = \cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi$$

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - (\cos \omega t)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \phi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \phi$$

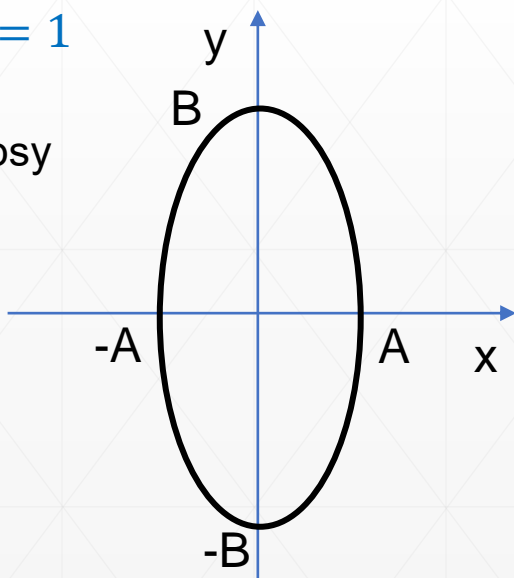
dla $\phi = \pi/2$

$$\cos \phi = 0, \quad \sin \phi = 1$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

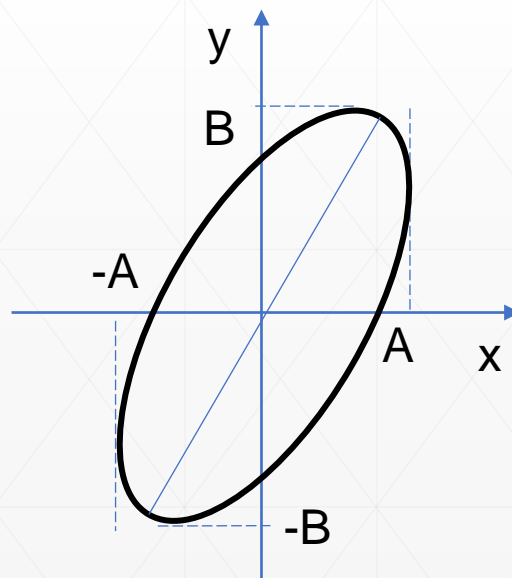
równanie elipsy

gdy $A = B$ to koła



dla $\phi = \pi/4$

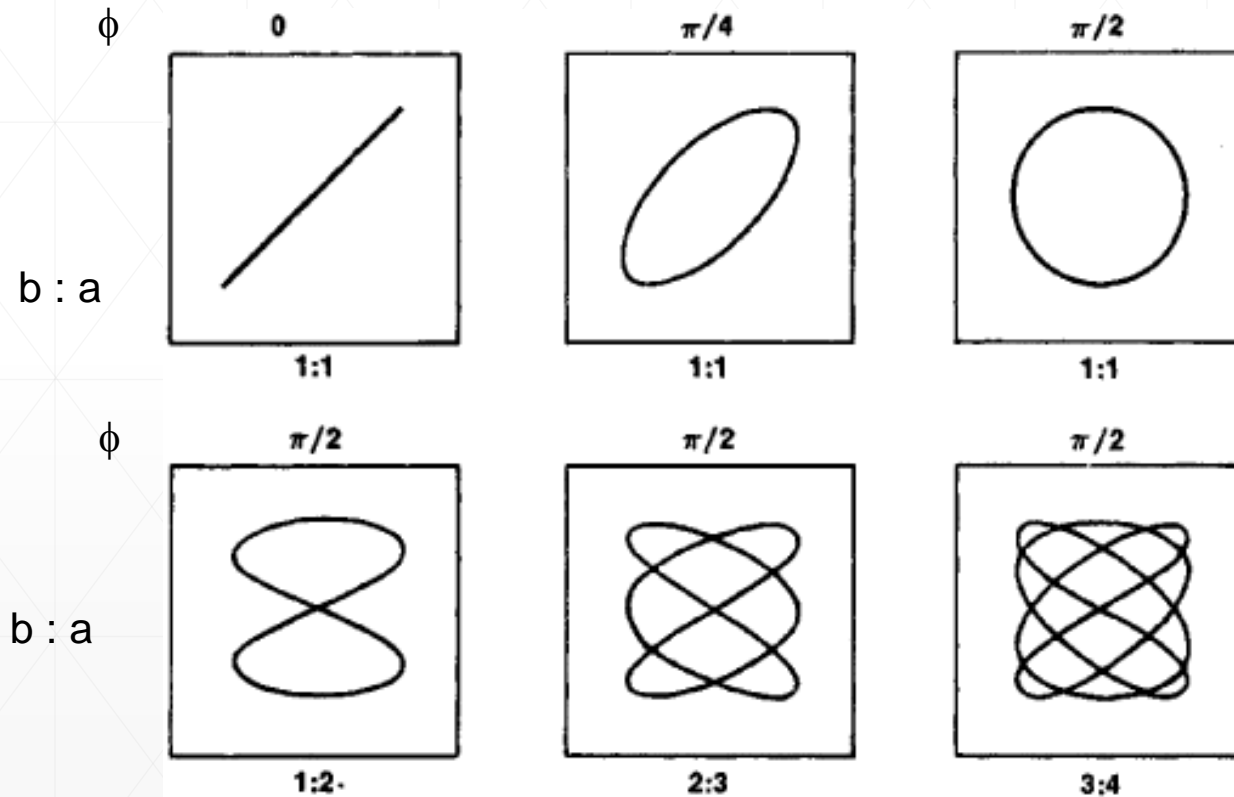
elipsa, ale o głównych osiach pod kątem do OX



Krzywe Lissajous

Składanie drgań prostopadłych o jednakowych amplitudach, ale o różnych częstościach i fazach

$$x = A \cos a \omega t$$
$$y = A \cos(b \omega t + \phi)$$



Ogólnie kształt krzywych Lissajous zależy od stosunku amplitud, częstości i przesunięć fazowych drgań.



Podsumowanie

- Drgania to procesy, w których dana wielkość fizyczna na przemian rośnie i maleje
- Drgania harmoniczne opisane są funkcją trygonometryczną np. $s(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0)$
- Parametry opisujące drgania (amplituda, faza początkowa, częstotliwość, faza, częstość kołowa, okres)
- Dla drgań harmoniczných przyspieszenie układu jest proporcjonalne do przemieszczenia i skierowane w kierunku położenia równowagi $m a = -k x$
- Dla drgań swobodnych energia kinetyczną zamienia się w energię potencjalną a ich suma pozostaje stała
- Jak składamy drgania:
 - o jednakowych częstościach – metoda wykresów fazowych
 - równoległych o różnych częstościach (co to są dudnienia)
 - wzajemnie prostopadłych – krzywe Lissajousa



Dziękuję za uwagę