



**Proszę o uwagę**

# 14. Drgania wymuszone - rezonans

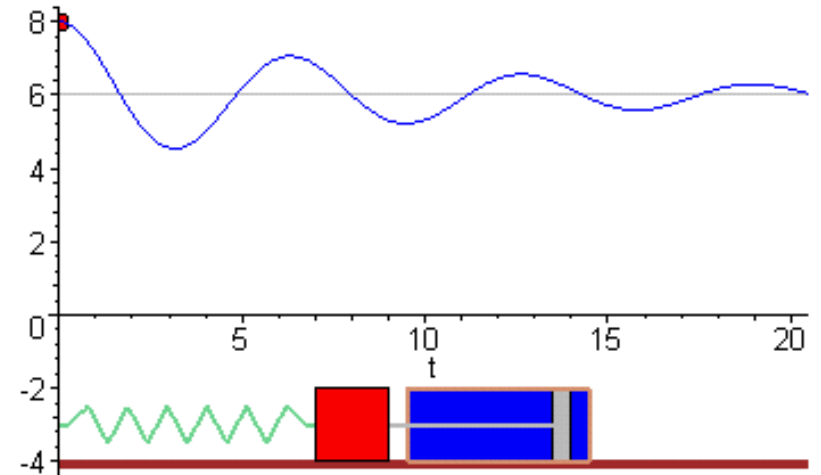
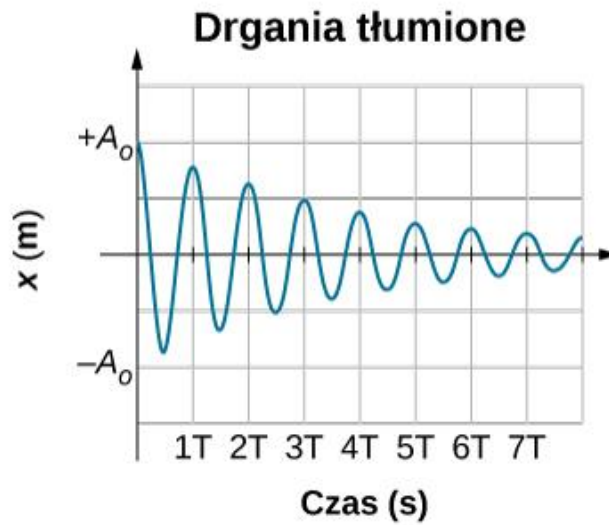
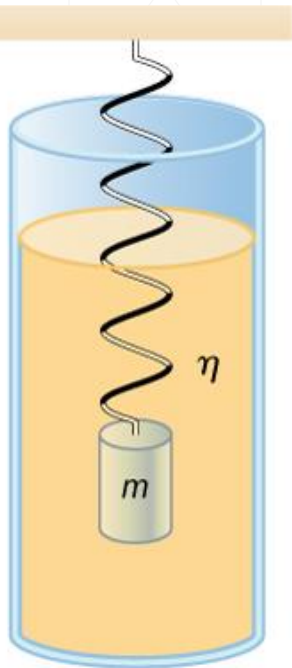
---

## Harmoniczne drgania nieswobodne:

- drgania tłumione
- drgania wymuszone
- rezonans
- drgania o kilku stopniach swobody
- drgania normalne



# Przykłady drgań



# Równanie drgań tłumionych

W przypadku działania sił oporu proporcjonalnych do prędkości ciała

$$F_t = -bv = -b \frac{dx}{dt}$$

Równanie ruchu  $m \frac{d^2x}{dt^2} = F$  przyjmuje postać  $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \text{ - współczynnik tłumienia}$$

Dla słabego tłumienia, gdy  $(\beta < \omega_0)$ , rozwiązanie tego równania jest postaci:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{gdzie } \omega^2 = (\omega_0^2 - \beta^2)$$

# Drgania tłumione

$$s = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi)$$

amplituda malejąca  
wykładniczo w czasie

częstość drgań tłumionych

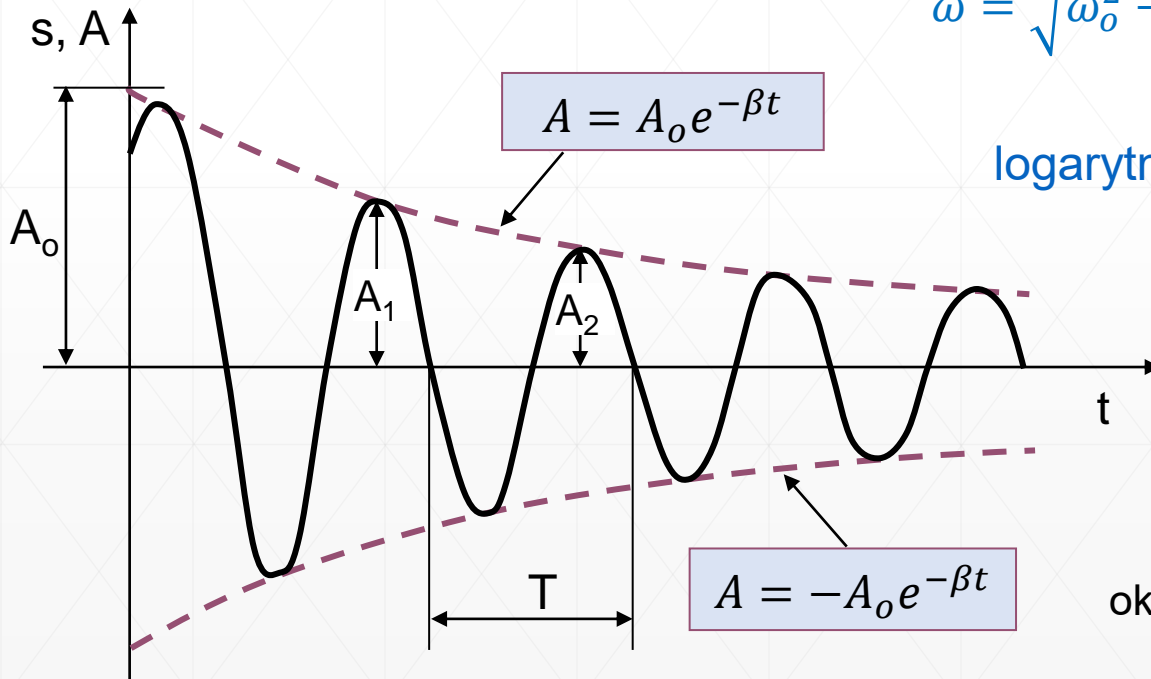
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} > T_0$$

logarytmiczny dekrement tłumienia

$$\begin{aligned} \Lambda &= \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} \\ &= \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \\ &= \ln e^{\beta T} = \beta \cdot T \end{aligned}$$

określa szybkość zmniejszania się  
amplitudy drgań



# Ruch aperiodyczny

$$\omega^2 = (\omega_0^2 - \beta^2)$$

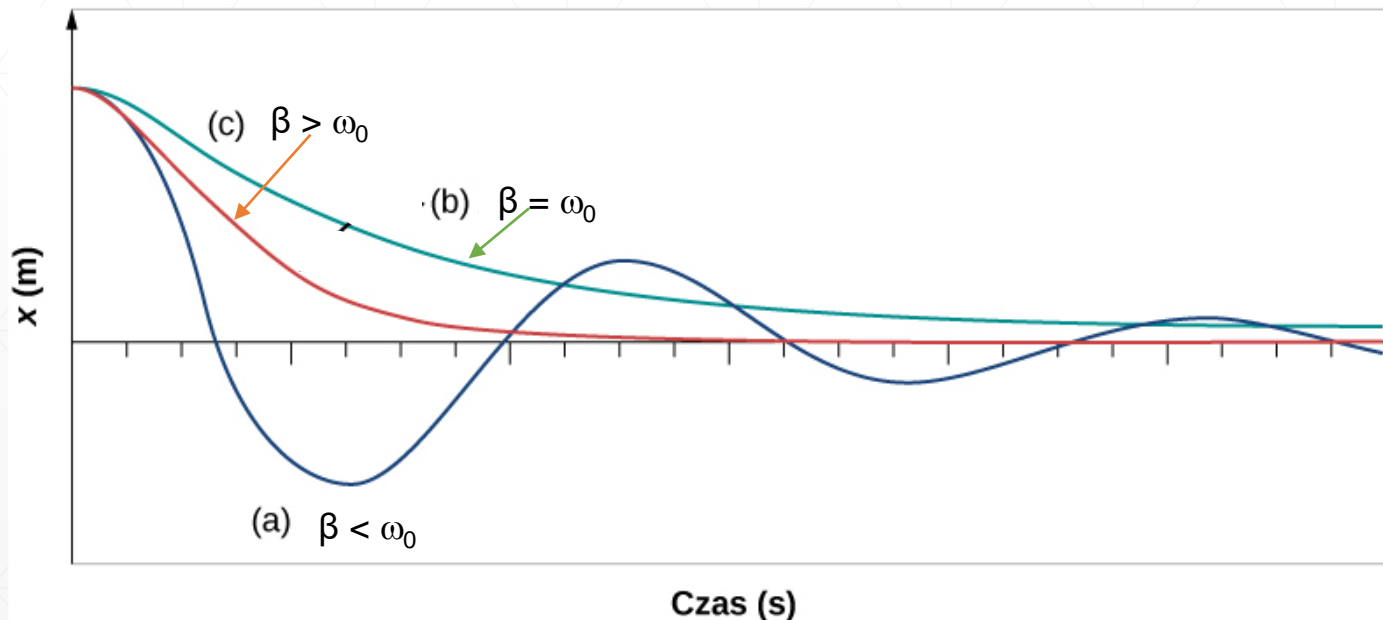
Wartość współczynnika tłumienia ma silny wpływ na charakter zmian drgań harmoniczych

Dla słabego tłumienia ( $\beta < \omega_0$ ) – tłumienie podkrytyczne

Dla silnego tłumienia ( $\beta = \omega_0$ ) – tłumienie krytyczne

( $\beta > \omega_0$ ) – tłumienie nadkrytyczne

} ruch aperiodyczny  
szybkie tłumienie  
drgań



# Drgania wymuszone

- aby zapobiec tłumieniu drgań należy skompensować straty energii
- przykładamy do układu drgającego harmoniczną siłę wymuszającą lub siłę elektromotoryczną

$$F = F_0 \cos \omega t$$

$$V = V_0 \cos \omega t$$

równanie ruchu przyjmuje postać:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = x_0 \cos \omega t$$

gdzie  $x_0 = \frac{F_0}{m}$

równanie drgań  
wymuszonych

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\beta \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = x_0 e^{i\omega t}$$

równanie drgań wymuszonych  
w postaci zespolonej

# Rozwiązanie równania drgań wymuszonych

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\beta \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = x_0 e^{i\omega t}$$

$$\frac{dz}{dt} = i\Omega z_0 e^{i\Omega t}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = i^2 \Omega^2 z_0 e^{i\Omega t}$$

Rozwiązania tego równania  $z(t)$  szukamy w postaci drgania harmonicznego o amplitudzie  $z_0$  i częstotliwości  $\Omega$ :  $z = z_0 e^{i\Omega t}$

$$-\Omega^2 z_0 e^{i\Omega t} + 2\beta i\Omega z_0 e^{i\Omega t} + \omega_0^2 z_0 e^{i\Omega t} = x_0 e^{i\omega t}$$

Równanie to musi być spełnione dla każdej chwili czasu, więc  $\Omega = \omega$

$$z_0 = \frac{x_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega} = \frac{x_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} + \frac{-2\beta\omega x_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} i$$

korzystając z definicji liczby zespolonej  $z_0 = |z_0| \cdot e^{i\phi} = |z_0|(\cos \phi + i \sin \phi) = a + b \cdot i$   
Wyznaczamy amplitudę i fazę drgań wymuszonych:

$$A = |z_0| = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

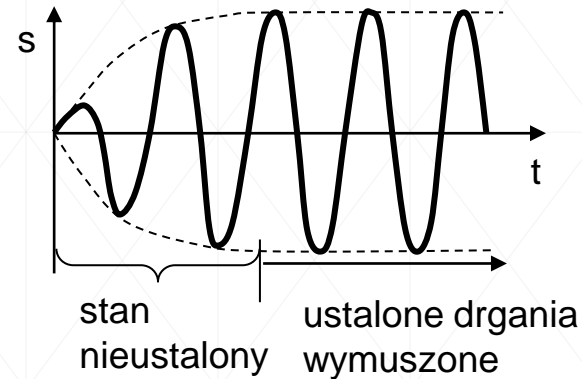
$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$z = |z_0| \cdot e^{i\phi} \cdot e^{i\omega t} = |z_0| \cdot e^{i(\omega t + \phi)}$$

$$s = \operatorname{Re} z = |z_0| \cdot \cos(\omega t + \phi)$$



# Wnioski

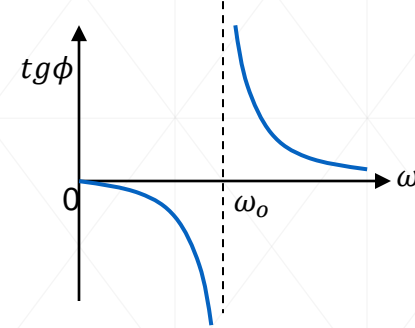


- po początkowym, nieustalonym stadium procesu następują ustalone drgania wymuszone
- drgania wymuszone odbywają się z częstotliwością siły wymuszającej  $\omega$
- amplituda tych drgań zależy od amplitudy siły wymuszającej, jej częstotliwości i parametrów układu drgającego
- faza drgań zależy od częstotliwości siły wymuszającej

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

# Właściwości ustalonych drgań wymuszonych



a) Siła wymuszająca o małej częstotliwości  $\omega \ll \omega_0$

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \approx \frac{x_0}{\omega_0^2}$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \rightarrow 0 \Rightarrow \phi \rightarrow 0$$

zgodność fazy siły z wychyleniem

b) Rezonans  $\omega \approx \omega_0$

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \approx \omega_0$$

$$A_r = \frac{x_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{x_0}{2\beta\omega_0}$$

← częstota rezonansowa

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{-\omega}{\beta} \rightarrow -\infty \Rightarrow \phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

wychylenie opóźnia się w fazie o  $\pi/2$

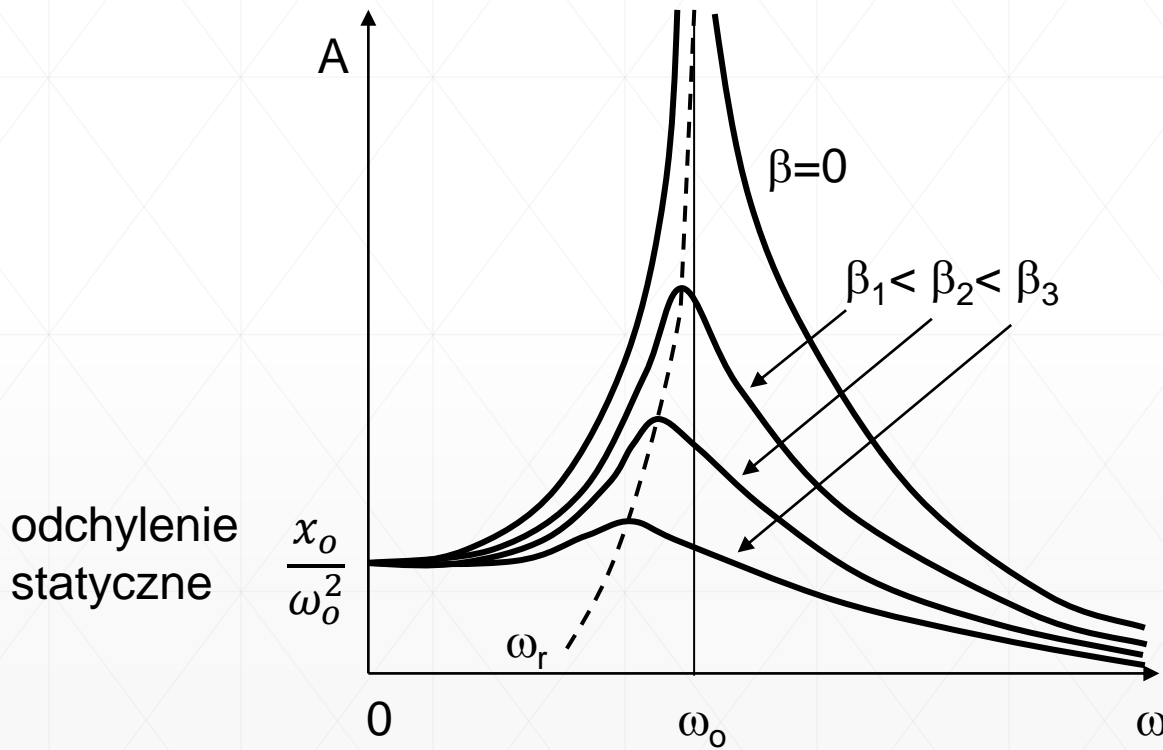
c) Siła wymuszająca o dużej częstotliwości  $\omega \gg \omega_0$

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{x_0}{\omega^2}$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{2\beta}{\omega} \rightarrow 0 \Rightarrow \phi \rightarrow -\pi$$

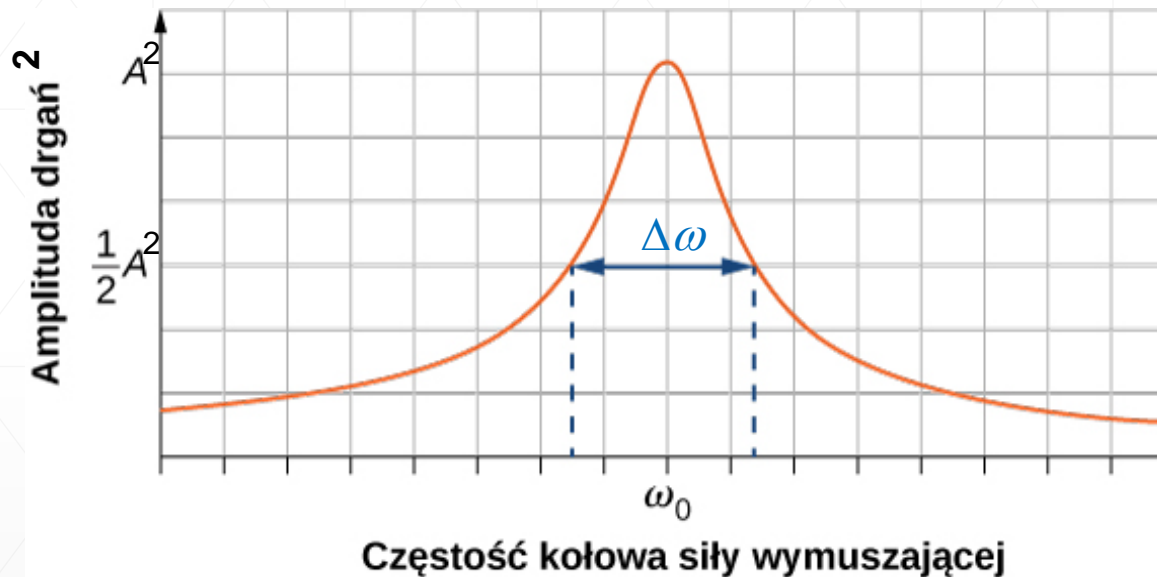
wychylenie opóźnia się w fazie o  $\pi$

# Amplituda drgań wymuszonych w funkcji częstości siły wymuszającej



# Dobroć układu rezonansowego

Zdolność do wzmacniania sygnału – ile razy amplituda w rezonansie jest większa niż w obszarze częstości nierezonansowych

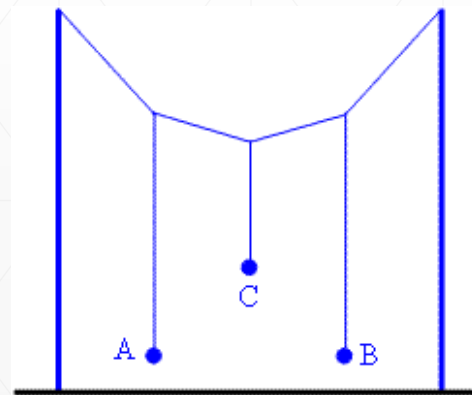


Dobroć układu zdefiniowana jest jako stosunek własnej częstości kołowej oscylatora do szerokości krzywej rezonansowej

$$Q = \omega_0 / \Delta\omega$$

# Przykłady rezonansu

- Wahadła zawieszono na rozpiętej między dwoma statywami nitce. Wahadło A przekazuje energię drgań do wahadła B, bo wahadła A i B mają ten sam okres drgań własnych, wahadło C ma inny.
- warunkiem rezonansu jest równość okresów drgań własnych ciał rezonujących.

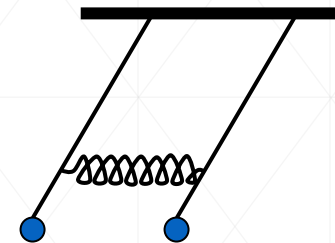
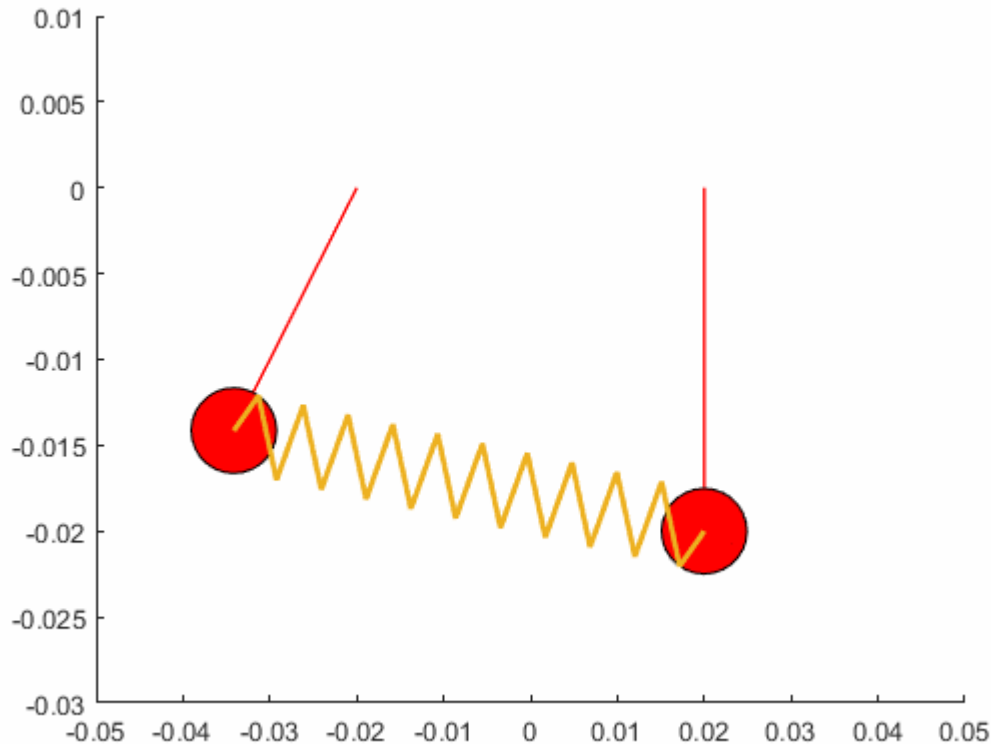


# Niebezpieczne skutki rezonansu



W 1940 r. most w Tacoma w stanie Waszyngton uległ zniszczeniu.

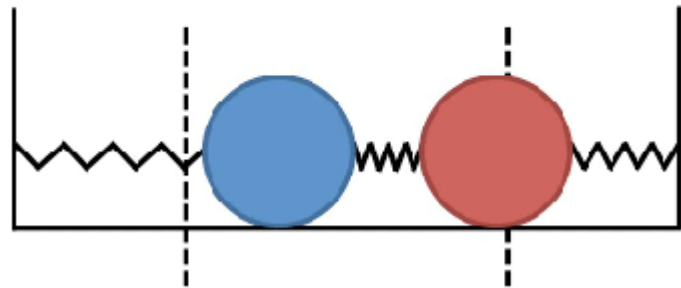
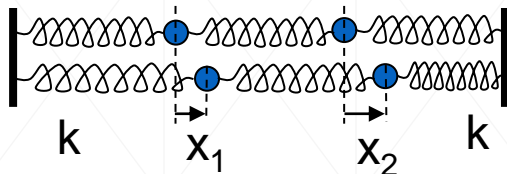
# Drgania o wielu stopniach swobody



Wahadło sprzężone

Układ fizyczny ma  $N$  stopni swobody, jeśli do opisu procesów w nim zachodzących trzeba użyć  $N$  wielkości niezależnych

# Drgania normalne oscylatora o dwóch stopniach swobody



$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -kx_2 - k(x_2 - x_1) = kx_1 - 2kx_2$$

$$m \frac{d^2 (x_1 + x_2)}{dt^2} = -k(x_1 + x_2) \quad \Psi_1 = x_1 + x_2$$

$$m \frac{d^2 (x_1 - x_2)}{dt^2} = -3k(x_1 - x_2) \quad \Psi_2 = x_1 - x_2$$

$$\frac{d^2 \Psi_1}{dt^2} = -\frac{k}{m} \Psi_1 \quad \omega_1 = \sqrt{k/m}$$

$$\frac{d^2 \Psi_2}{dt^2} = -\frac{3k}{m} \Psi_2 \quad \omega_2 = \sqrt{3k/m}$$

$$\Psi_1 = 2A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$\Psi_2 = 2A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Nowe współrzędne  $\Psi_1, \Psi_2$  nazywamy **normalnymi**, a same drgania **drganiami własnymi** czyli normalnymi

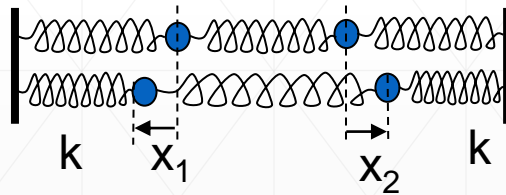


$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= x_1 + x_2 \\ \Psi_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(\Psi_1 + \Psi_2) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(\Psi_1 - \Psi_2) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}$$

Drgania oscylatora o dwóch stopniach swobody są superpozycją dwóch drgań normalnych o różnych częstościach własnych

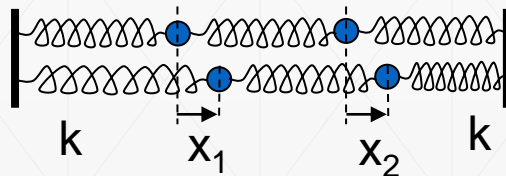
wahadła drgają z tą samą częstością w zgodnych fazach, przeciwnych kierunkach

$$A_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$












wahadła drgają z tą samą częstością w zgodnych fazach i kierunkach

$$A_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$



# Dla układu o N stopniach swobody:

- istnieje N częstotliwości własnych,
- układ może wykonywać N drgań normalnych,
- dla drgań normalnych wszystkie elementy drgają w tej samej fazie, zaś amplitudy drgań są wzajemnie zależne

Liczba stopni swobody	$\Psi_1$	$\Psi_2$	$\Psi_3$
1			
2			
3			
N			

# Drgania normalne struny (liny) rozpiętej wzdłuż osi $x$ ze stałym naciąganiem $T$

dla struny o skończonej długości  $L$  zamocowanej na obu końcach drgania normalne odbywają się ze stałą częstotliwością i amplitudą zależną od położenia

$$y(x, t) = A(x) \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

z warunku zamocowania na początku ( $x=0$ ) amplitudę opisujemy funkcją  $\sin(kx)$

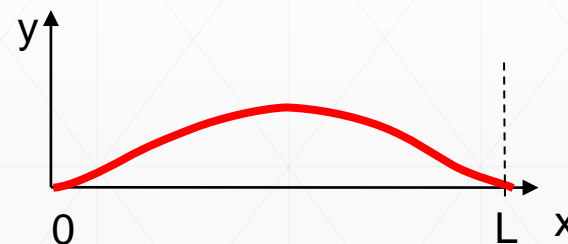
$$y(x, t) = A_0 \sin(kx) \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

z warunku zamocowania na końcu ( $x=L$ )

$$\sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_n L = n\pi$$

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

gdzie wielkość  $\lambda_n$  jest o okresem przestrzennym zwanym długością fali



# Drgania normalne struny (liny) rozpiętej wzdłuż osi $x$ ze stałym naciągiem $T$

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

pierwsze drganie normalne dla  $n = 1$   
wszystkie punkty drgają zgodnie w fazie

$$\lambda_1 = 2L \quad A(x) = A_o \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

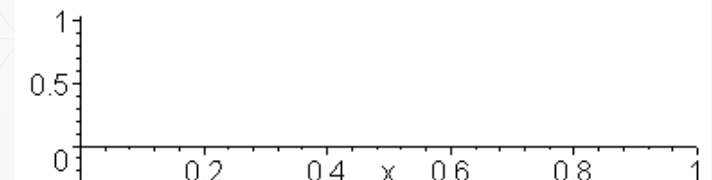
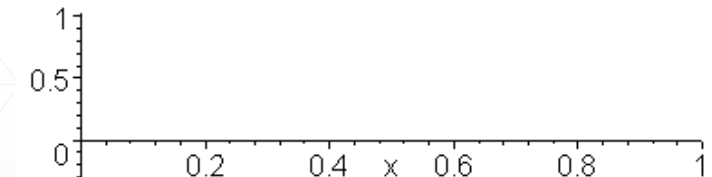
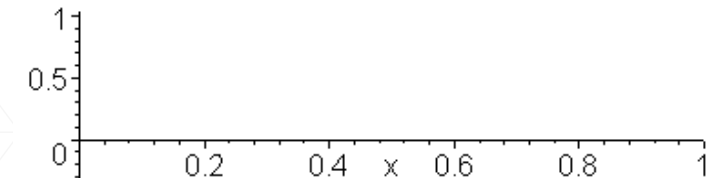
drugie drganie normalne dla  $n = 2$

$$\lambda_2 = L \quad A(x) = A_o \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

trzecie drganie normalne dla  $n = 3$

$$\lambda_3 = \frac{2}{3}L \quad A(x) = A_o \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$$

drgania normalne struny są przykładem powstawania tzw. fali stojącej w strunie



# Podsumowanie

- Pojęcie drgań tłumionych, postać drgań  $x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi)$  i podstawowe parametry: częstotliwość, współczynnik tłumienia i logarytmiczny dekrement tłumienia.
- Aby podtrzymać ruch tłumiony musi działać siła wymuszająca.
- Drgania wymuszone zachodzą z częstotliwością wymuszenia, a amplituda i faza tych drgań zależy od częstotliwości wymuszenia.
- Dla częstości wymuszenia równej częstości drgań własnych zachodzi wzrost amplitudy drgań – rezonans.
- W przypadku drgań o wielu stopniach swobody wprowadzamy pojęcie drgań normalnych – wszystkie drgania zachodzą z jednakową częstością.
- Drgania własne (normalne) struny – fala stojąca.



**Dziękuję za uwagę**