



Proszę o uwagę

22. Ruch falowy

- fale biegnące,
- równanie fali,
- przenoszenie energii przez fale,
- fale stojące,
- paczka falowa, prędkość grupowa a prędkość fazowa,
- dyspersja, fale akustyczne.

1. Czym różni się fala od drgań oraz podaj podział fal ze względu rodzaj oddziaływania, kształt czoła fali, zmiennej wielkości fizycznej oraz krótko omów fale poprzeczne, podłużne.
2. Matematyczny opis harmonicznego fali płaskiej – równanie procesu falowego oraz funkcja opisująca falę biegnącą; określ poszczególne parametry fali.
3. Prędkość fazowa a prędkość grupowa czym są i jaka jest pomiędzy nimi zależność – na tej podstawie określ ośrodek dyspersyjny oraz niedyspersyjny.
4. Opisz proces przenoszenie energii przez falę - co to jest paczka falowa i w jaki sposób powstaje oraz jak się propaguje.
5. Czym jest, jak powstaje oraz czym się charakteryzuje fala stojąca. Jej związek z drganiami normalnymi.
6. Czym jest dźwięk z punktu widzenia procesu falowego – określ czym są ton, wysokość, barwa, natężenie dźwięku.
7. Co wiesz o efekcie Dopplera jak i o prędkości dźwięku (od czego zależy) .



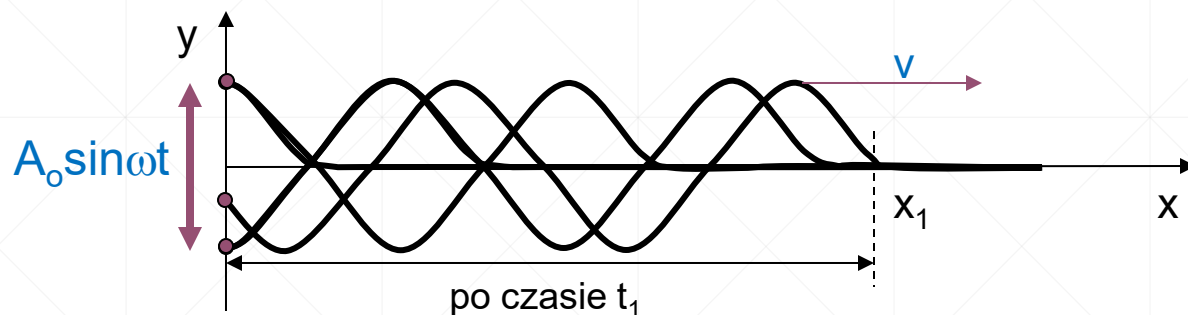
Podstawowe definicje



- **fala** – zaburzenie rozchodzące się w ośrodku lub w przestrzeni któremu towarzyszy przenoszenie energii:
 - falą może być pojedynczy impuls o dowolnym kształcie
 - lub powtarzający się impuls co pewien czas, czyli rozchodzące się drganie
- **rodzaje fal:**
 - fale sprężyste (mechaniczne) rozchodzące się w ośrodkach sprężystych
 - fale elektromagnetyczne rozchodzące się w dowolnych ośrodkach lub próżni
 - fale materii
- **fale harmoniczne** – jeżeli zaburzenie jest drganiem harmonicznym
- **fala biegnąca** – to fala, w której punkty o jednakowej fazie (np. grzbiety) poruszają się
- **fala stojąca** – to fala, w której grzbiety i doliny nie przemieszczają się, czyli są to drgania ośrodka zwane drganiami normalnymi

Równanie fali

Rozpatrzmy napiętą linę której jeden koniec drga ruchem harmonicznym, a zaburzenie rozchodzące się z prędkością v wzdłuż osi x



w punkcie początkowym $x = 0$

$$y(0, t) = A_0 \sin(\omega t)$$

w punkcie x_1 zaburzenie pojawi się po $t_1 = \frac{x_1}{v}$

$$y(x_1, t) = A_0 \sin \omega (t - t_1)$$

w dowolnym punkcie x

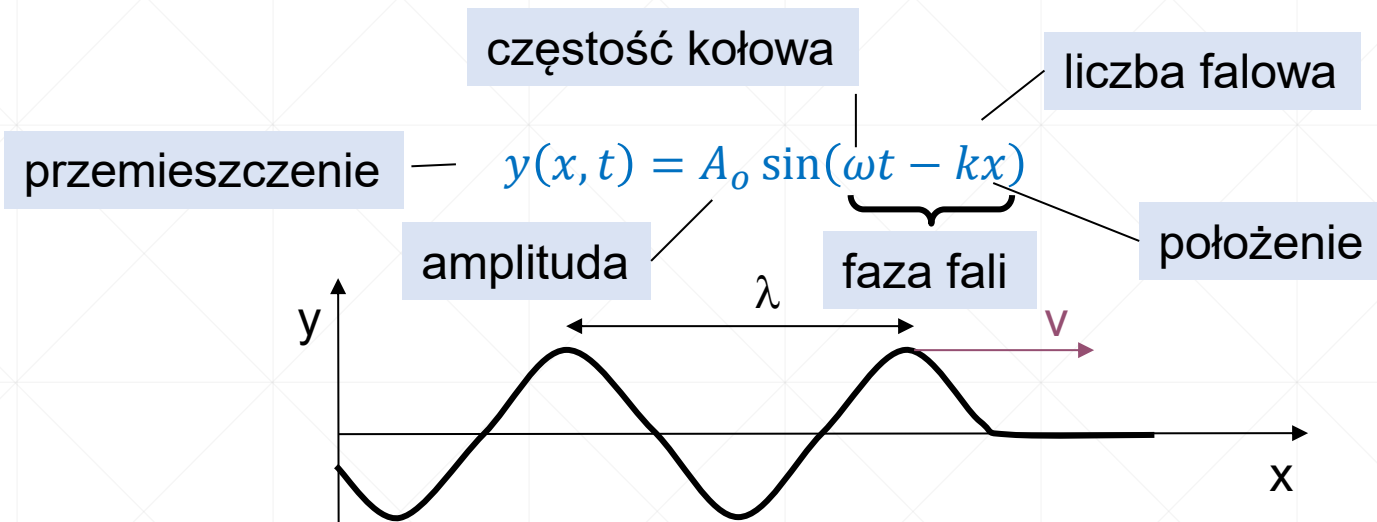
$$y(x, t) = A_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A_0 \sin(\omega t - kx)$$

gdzie $k = \omega/v$ nazywamy liczbą falową

$$y(x, t) = A_0 \sin(\omega t - kx + \phi)$$

– równanie fali z fazą początkową ϕ

Wielkości charakteryzujące fale



ponieważ $k = \omega/v$ to $k = 2\pi/v \cdot T$ ale $\lambda = v \cdot T$ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ liczba falowa

wielkość λ jest okresem przestrzennym zwanym długością fali

propagacja w
kierunku $+x$
kierunku $-x$

$$y(x, t) = A_o \sin(\omega t - kx)$$

$$y(x, t) = A_o \sin(\omega t + kx)$$

$$\omega t - kx = \text{const}$$

$$\omega - k \cdot \frac{dx}{dt} = 0$$

stałość fazy

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

stąd k nazywa się też
wektorem falowym

prędkość fazowa – prędkość
przemieszczania się fazy

Równanie różniczkowe fali płaskiej

$$y(x, t) = A_o \sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -A_o \omega^2 \sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = -A_o k^2 \sin(\omega t - kx)$$

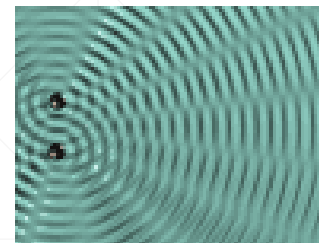
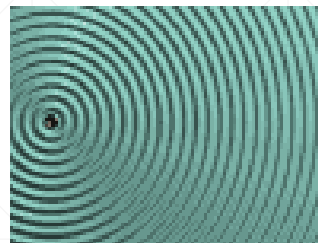
ponieważ $k = \omega/v$


$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = -A_o \frac{\omega^2}{v^2} \sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

różniczkowa postać równania fali płaskiej

Właściwości fal



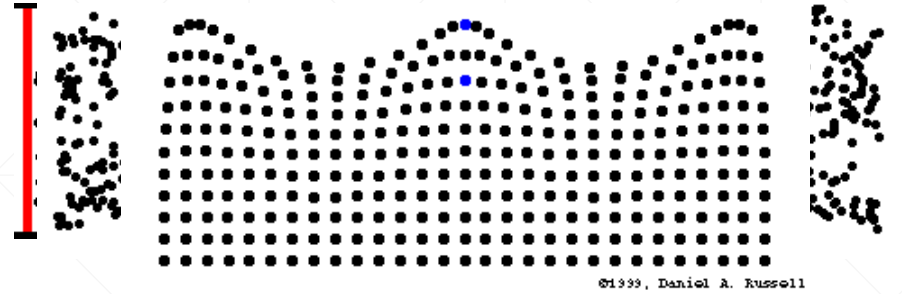
- fale harmoniczne opisane są funkcją sinus lub cosinus
- dowolny ruch falowy można przedstawić jako superpozycję fal harmoniczných – analiza Fouriera
- powierzchnia falowa (**czoło fali**) – zbiór punktów o takiej samej fazie jest jednakowo odległa od źródła fali
- linie prostopadłe do powierzchni falowej to promień fali, wskazują kierunek propagacji
- fale harmoniczną można przedstawić również w zapisie zespolonym:

$$\Psi(x, t) = A_o e^{i(\omega t - kx)} = A_o e^{i\omega t} e^{-ikx}$$

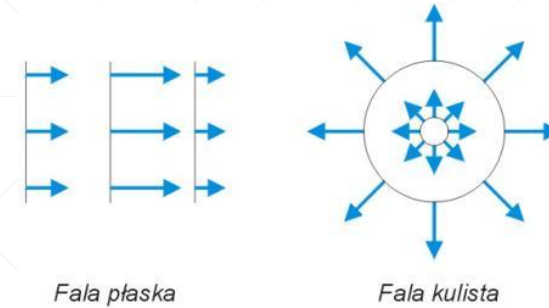
sens fizyczny ma tylko część rzeczywista zespolonej funkcji falowej

Zasada superpozycji: jeśli w ośrodku propagują się dwie fale, to wypadkowe zaburzenie ośrodka jest równe sumie zaburzeń wywołanych przez poszczególne fale

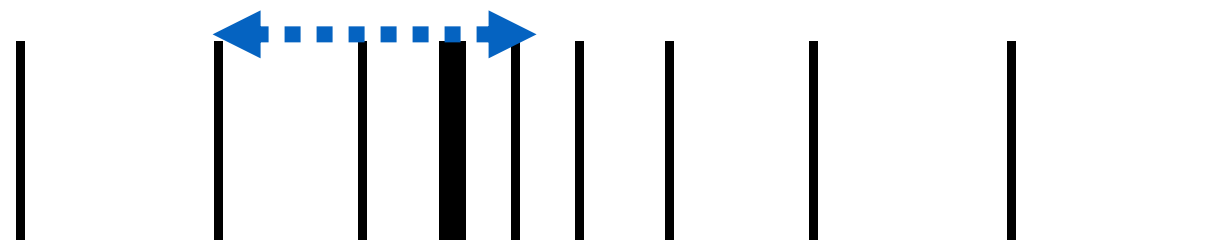
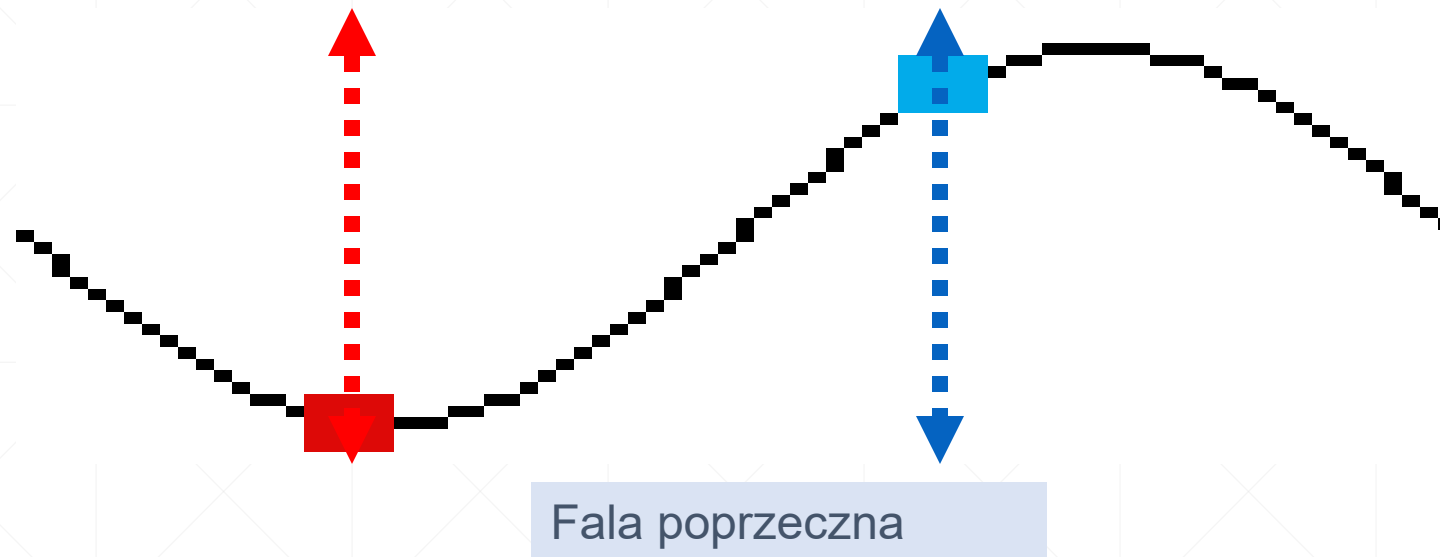
Rodzaje fal



- w zależności od kształtu czoła fali:
 - płaskie
 - walcowe (koliste)
 - kuliste
- w zależności od zmiennej wielkości fizycznej:
 - skalarne (np. fale ciśnienia)
 - wektorowe (np. elektromagnetyczne)
 - podłużne
 - poprzeczne, tylko w ośrodkach sprężystych
 - powierzchniowe



mogą być spolaryzowane

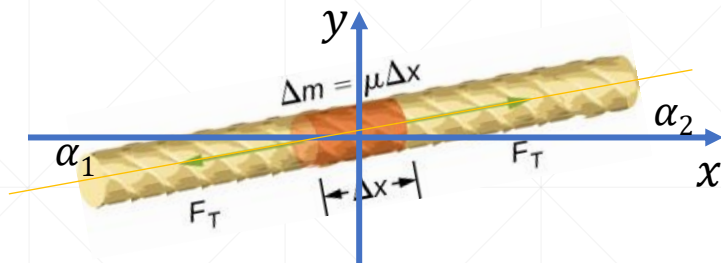


Fala podłużna

Przykład – fala w naprężonej linie

Lina o gęstości liniowej μ napięta naprężeniem F_T wykonuje drgania poprzeczne. Siła wypadkowa działająca na element liny w kierunku pionowym jest równa:

$$\mu = \frac{\text{masa liny}}{\text{długość}}$$



Dla małych kątów:

$$\sin \alpha = \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$F_{wyp} = F_T \sin \alpha_1 - F_T \sin \alpha_2 = \Delta m a = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$F_T \alpha_1 - F_T \alpha_2 = F_T \Delta \alpha = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta x} = \frac{\mu}{F_T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(\frac{\mu}{F_T} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

porównując z równaniem falowym $\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$ otrzymujemy: $v = \sqrt{F_T / \mu}$

Prędkość fazowa zależy od parametru sprężystości ośrodka F_T (naprężenia liny) oraz parametru bezwładności μ (gęstości liniowej)

Energia przenoszona przez fale

Uśredniona w czasie moc sinusoidalnej fali mechanicznej, przez którą należy rozumieć średnią szybkość przenoszenia energii przez falę wynosi:

$$\langle P \rangle = \frac{F_T \omega^2}{2v} A_0^2 = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A_0^2 v$$

uśredniona w czasie moc fali sinusoidalnej jest wprost proporcjonalna do **kwadratu amplitudy** fali i do **kwadratu częstości kołowej** fali.

Przykłady przenoszenia energii przez fale:

- trzęsienia ziemi niszczą całe miasta,
- hałas uszkadza komórki nerwowe w uchu,
- fale wodne podmywają brzeg morza,
- ultradźwięki leczą nadwerżone mięśnie,
- wiązka laserowa niweluje komórki nowotworowe.

Fale stojące

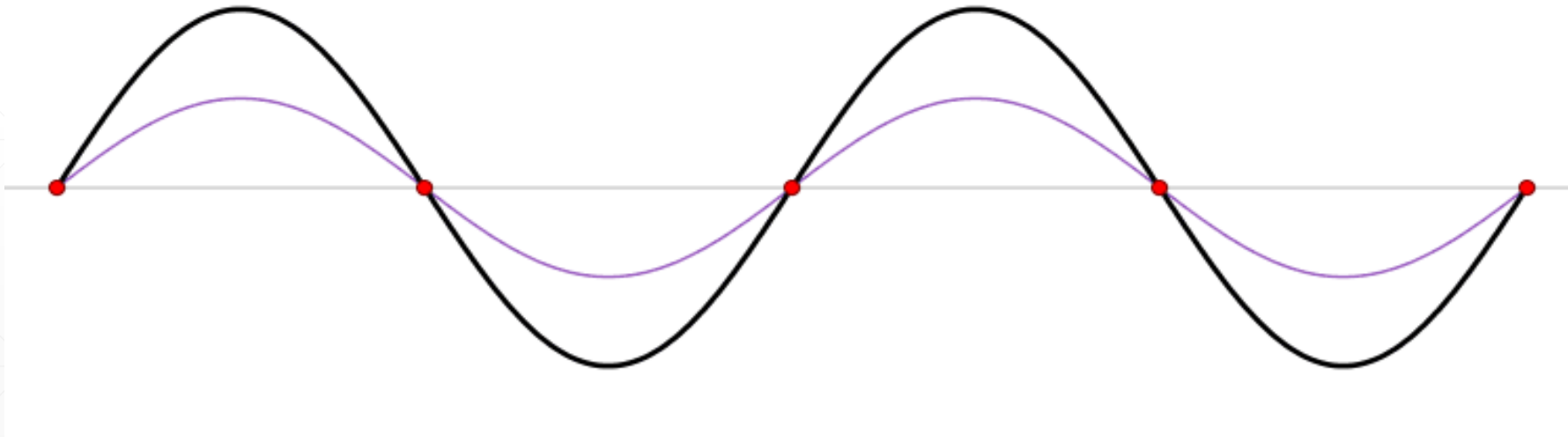
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2A \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Fala stojąca powstaje przy nakładaniu się dwu harmoniczných fal biegnących propagujących się w przeciwnych kierunkach z jednakowymi prędkościami i amplitudami

$$y_1 = A \cos(\omega t - kx)$$

$$y_2 = A \cos(\omega t + kx)$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos kx \cdot \cos \omega t$$



strzałka – $kx = \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \Rightarrow x = \pm n \frac{\lambda}{2} \rightarrow A_{st} = 2A$

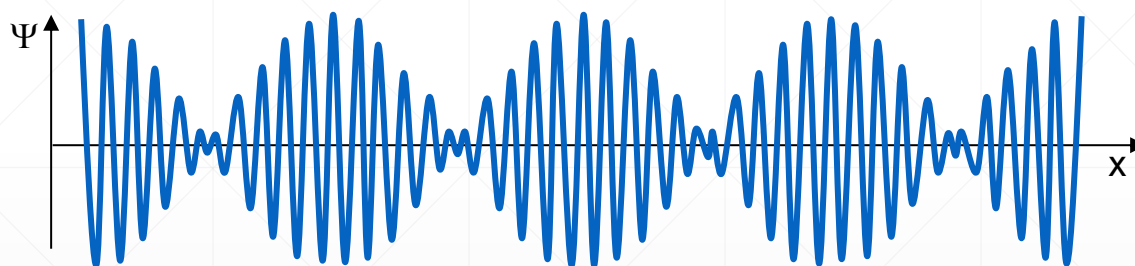
węzeł – $kx = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \Rightarrow x = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \rightarrow A_{st} = 0$

Superpozycja fal harmoniczych - prędkość grupowa

Rozważmy dwie fale harmoniczne o nieco różnych częstościach $d\omega \ll \omega$

$$y_1 = A_o \sin((\omega + d\omega)t - (k + dk)x) \quad y_2 = A_o \sin((\omega - d\omega)t - (k - dk)x)$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A_o \cos(d\omega \cdot t - dk \cdot x) \cdot \sin(\omega t - kx)$$



w wyniku superpozycji dwóch fal otrzymaliśmy fale harmoniczną o częstości nośnej ω i modulowanej amplitudzie przenoszonej z prędkością grupową v_g

$$d\omega \cdot t - dk \cdot x = \text{const}$$

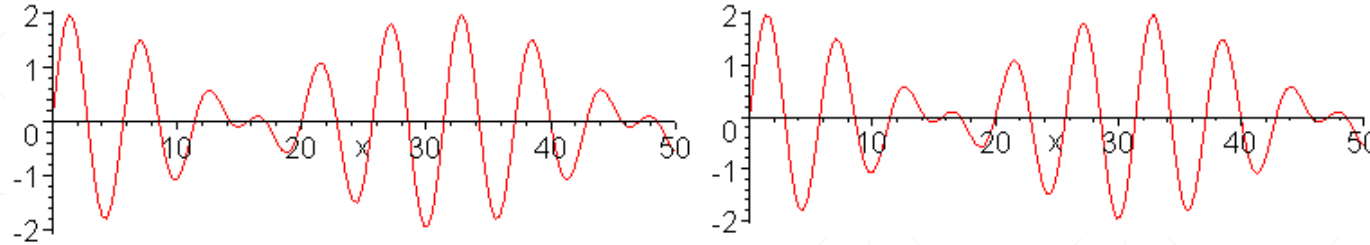
$$d\omega \cdot dt - dk \cdot dx = 0$$

$$v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$$

- prędkość grupowa

Dyspersja fal

szukamy związku pomiędzy prędkością grupową a fazową



$$v = \frac{\omega}{k} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dkv}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} \quad dk = d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$$

$$v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

prędkością grupową różni się od fazowej, gdy prędkość fazowa zależy od częstości (długości fali). Zależność v od λ nazywamy **dyspersją**.

ośrodki dyspersyjne – ($v \neq v_g$) fale o różnej długości rozchodzą się z różną prędkością, np. pryzmat dla światła

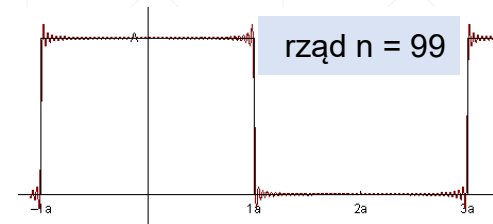
ośrodki niedyspersyjne – ($v = v_g$) fale o różnej długości rozchodzą się z taką samą prędkością, np. w próżni

Analiza drgań Fouriera

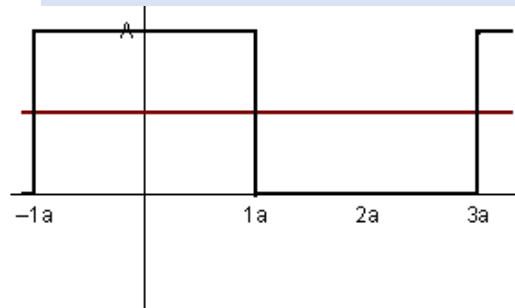
$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n \omega t + b_n \cos n \omega t)$$

Każde drganie okresowe nieharmoniczne można przedstawić w postaci nieskończonego szeregu trygonometrycznego zwanego szeregiem Fouriera, czyli w postaci sumy n drgań harmoniczných

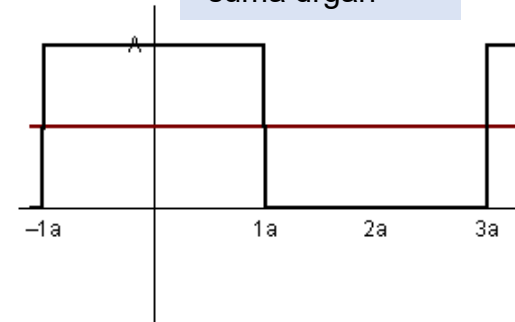
$$y = \frac{A}{2} + \frac{2A \cos \omega t}{\pi} - \frac{2A \cos 3 \omega t}{3\pi} + \frac{2A \cos 5 \omega t}{5\pi} - \frac{2A \cos 7 \omega t}{7\pi}$$



składowe harmoniczne rzędu

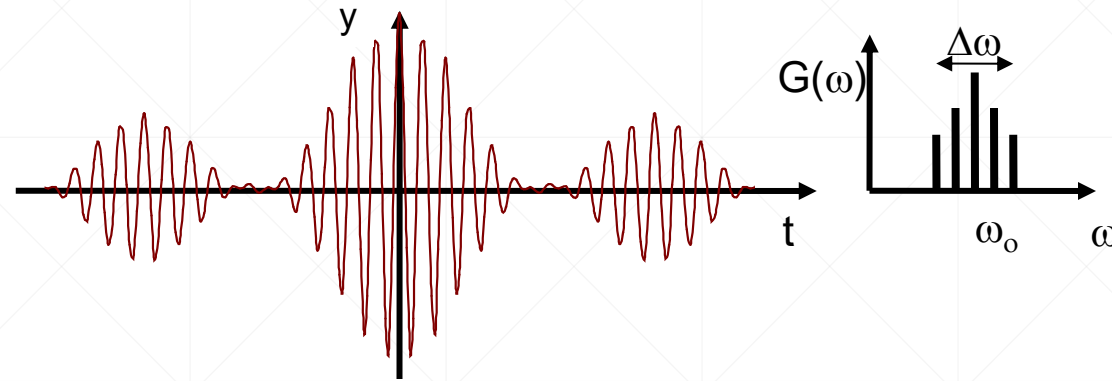


suma drgań

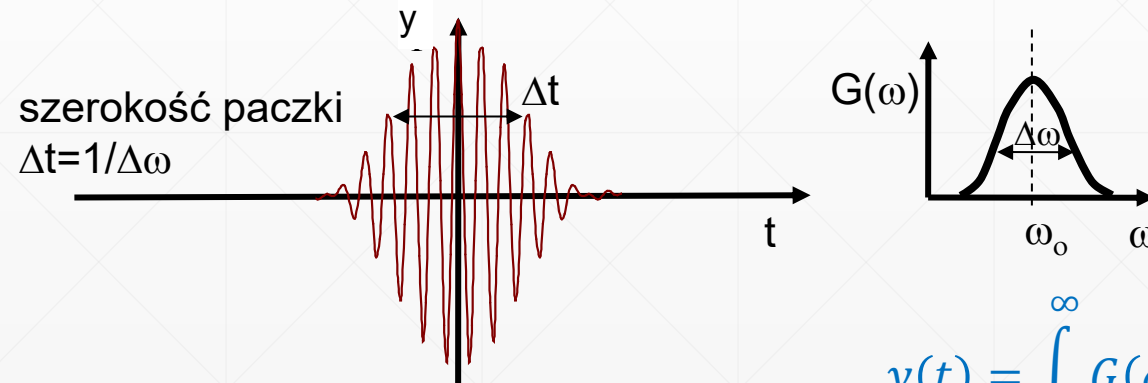


Superpozycja Fouriera

Dodając większą liczbę fal o częstościach bliskich ω_0 boczne dudnienia ulegają stłumieniu. Poniżej wykres dla sumy 5 fal.



Przy sumowaniu nieskończonej liczby fal o częstościach bliskich ω_0 i amplitudach opisanych funkcją Gaussa otrzymujemy pojedynczą paczkę falową.



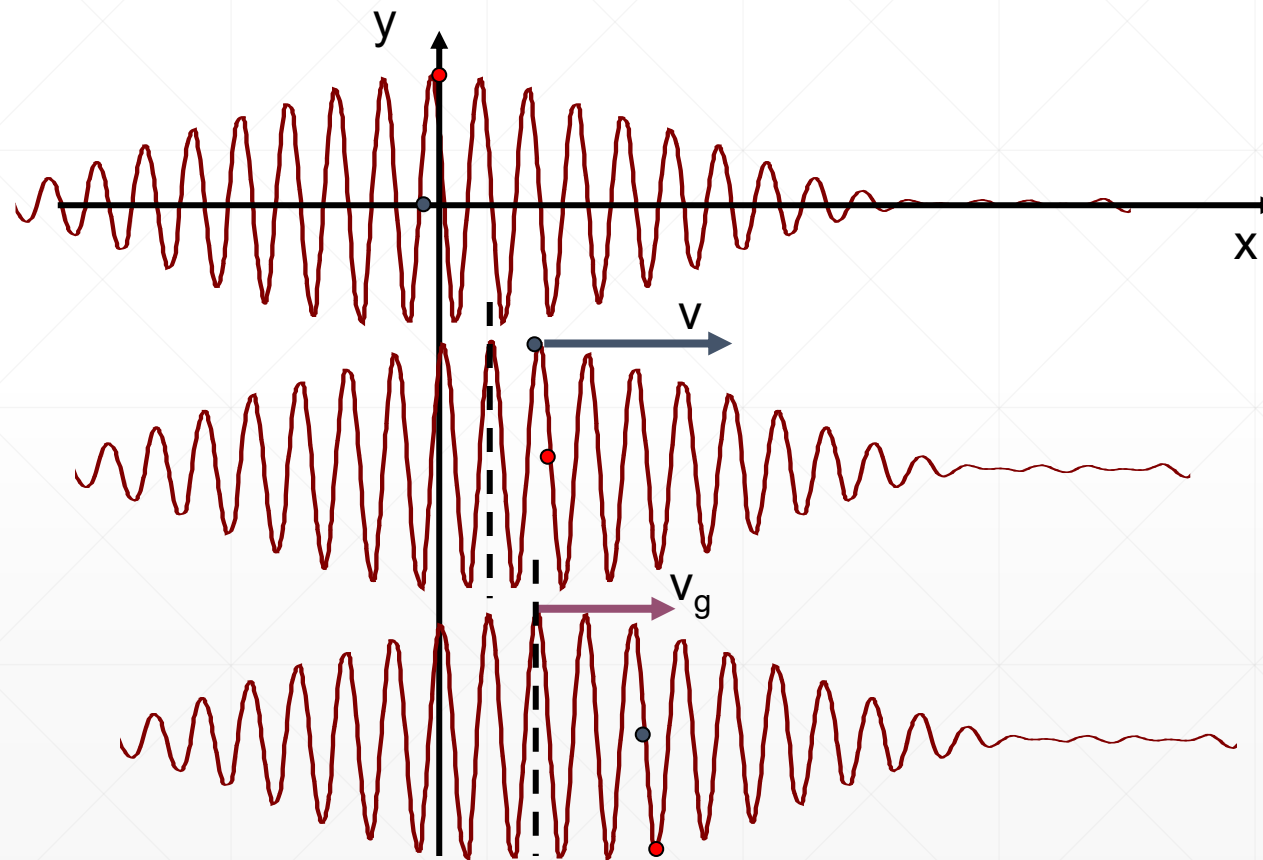
$$y(t) = \int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega t d\omega$$

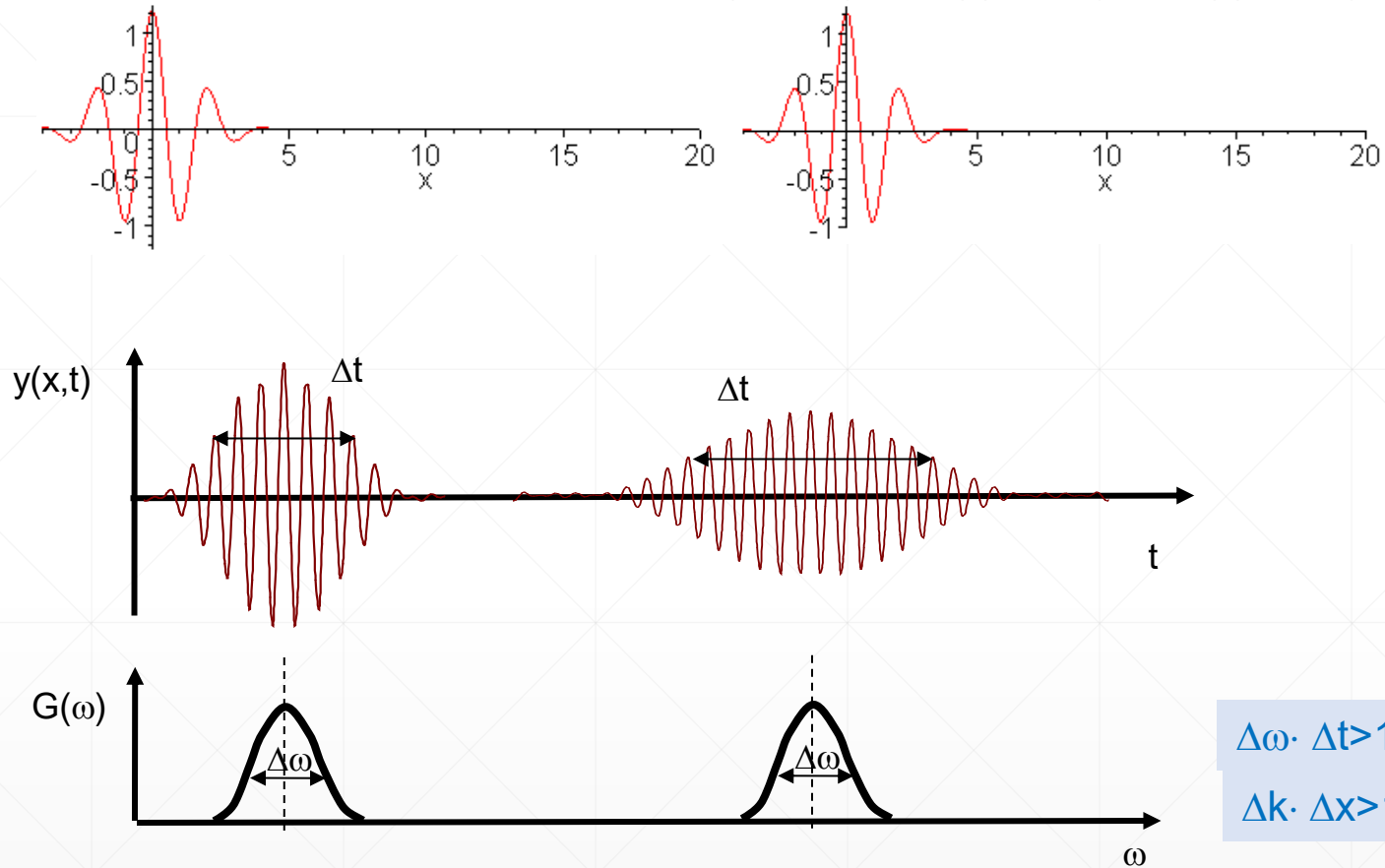
Paczka falowa

- w praktyce posługujemy się skończonymi ciągami falowymi tzw. paczkami falowymi
- paczka falowa powstaje w wyniku superpozycji fal harmoniczných o częstościach z przedziału $\Delta\omega$ i amplitudach opisanych funkcją Gaussa
- im mniejsze $\Delta\omega$ tym bardziej paczka falowa rozmyta jest w czasie
- paczka falowa rozchodzi się z prędkością grupową
- danej paczce falowej przyporządkowujemy odpowiednie pasmo liczb falowych Δk

$$\Delta k = \left(\frac{dk}{d\omega} \right) \Delta\omega = \frac{\Delta\omega}{v_g} = \frac{1}{v_g \cdot \Delta t} = \frac{1}{\Delta x}$$

Prędkość grupowa, a prędkość fazowa paczki falowej





w ośrodku dyspersyjnym paczka falowa ulega deformacji (rozmyciu), gdyż poszczególne składowe propagują się z różnymi prędkościami w ośrodku niedyspersyjnym paczka falowa nie ulega rozmyciu

Fale i cząstki

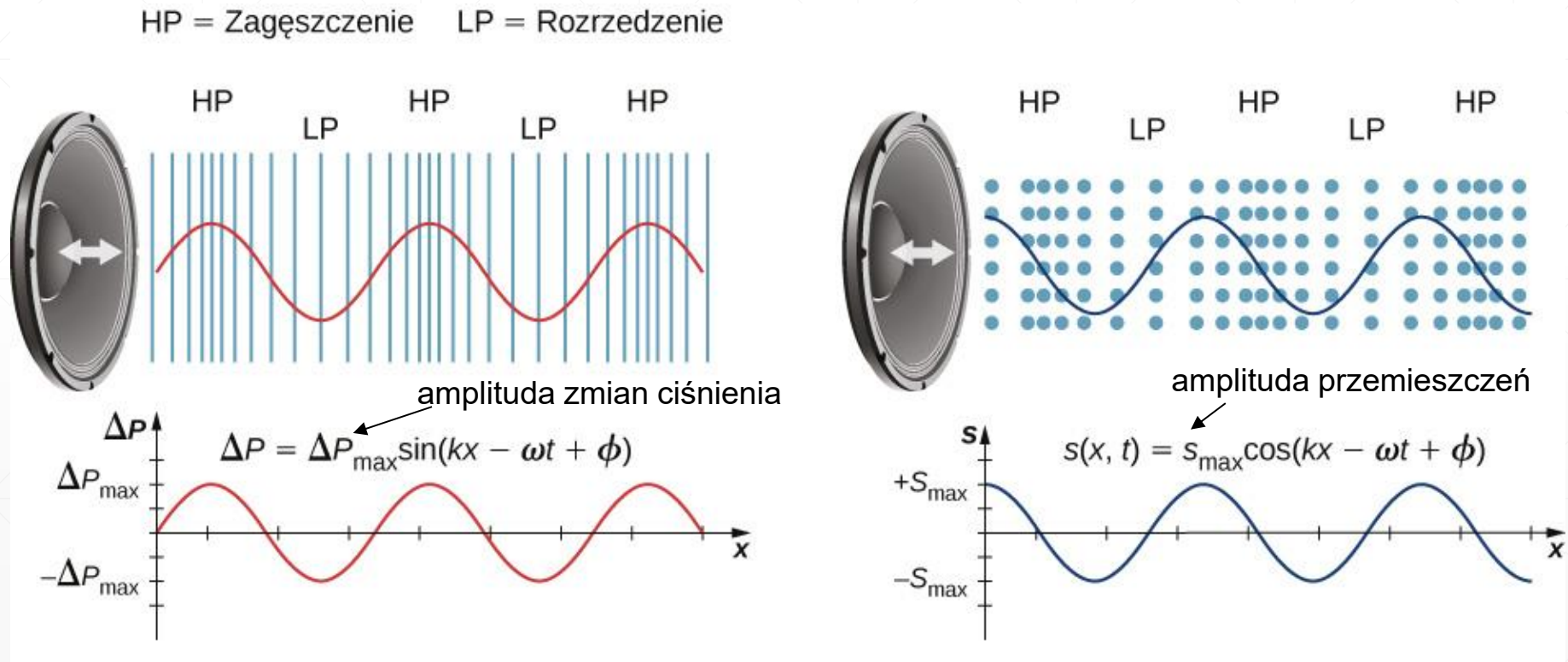
- **cząstki** – obiekty materialne, które poruszają się z jednego punktu do drugiego niosąc ze sobą informację i energię
- **fale** – informacja i energia przemieszczają się z jednego punktu do drugiego, mimo że żaden obiekt materialny nie przemieszcza się

„Często zdarza się, że fala ucieka z miejsca powstania, podczas gdy woda pozostaje, podobnie jest z falami jakie wiatr wywołuje na polu zboża -widzimy fale biegnącą przez pole, podczas gdy zboże pozostaje w miejscu”

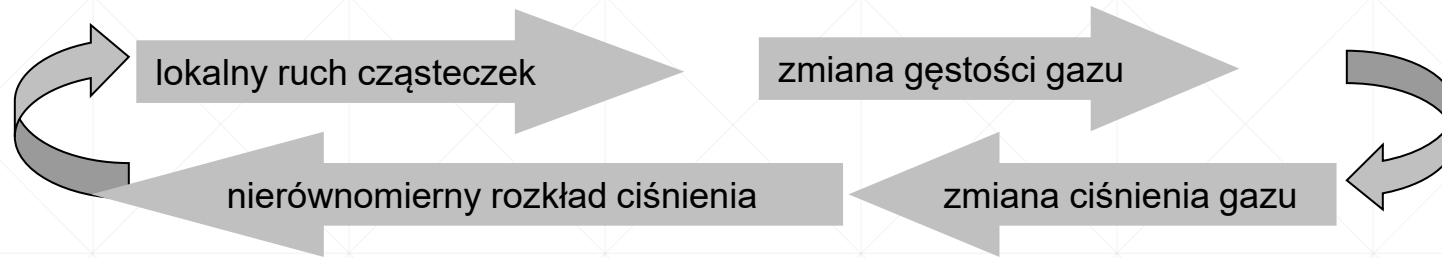
Leonardo da Vinci

Fale dźwiękowe w powietrzu

Fale dźwiękowe w powietrzu są przykładem fal podłużnych polegających na rozchodzeniu się zagęszczeń i rozrzedzeń powietrza



Modele opisujące dźwięk



Dźwięk może być opisywany jako zmiany ciśnienia powietrza wokół wartości średniej:

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_{max} \sin(\omega t - kx)$$

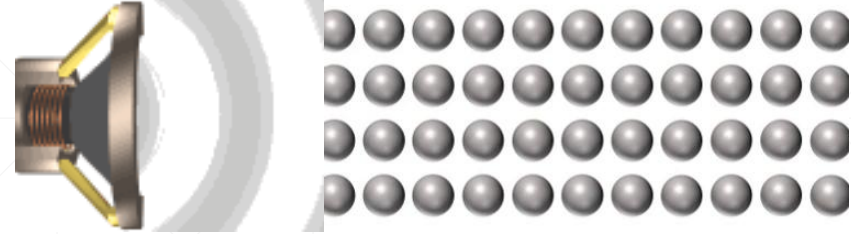
Fale dźwiękowe mogą być modelowane za pomocą drgających cząsteczek powietrza:

$$s(x, t) = s_{max} \cos(\omega t - kx)$$

Związek pomiędzy ciśnieniem a wychyleniem określa zależność:

$$\Delta p_{max} = (v\rho\omega)s_{max}$$

Prędkość dźwięku



- prędkość dźwięku zależy od sprężystości i bezwładności ośrodka,

$$v = \sqrt{\text{sprężystość} / \text{bezwładność}}$$

- prędkość dźwięku:

- w strunie $v = \sqrt{F_T / \mu}$

- w cieczy $v = \sqrt{B / \rho}$

- w ciele stałym $v = \sqrt{\beta / \rho}$

- w gazach $v = \sqrt{\gamma p_0 / \rho}$

F_T - naprężenie struny

μ - gęstość liniowa masy

B - moduł ścisłości

β - współczynnik sprężystości

ρ - gęstość ośrodka

γ - stała przemiany
adiabaticznej

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$$

- powietrze 340 m/s, woda 1500 m/s, stal 6000 m/s

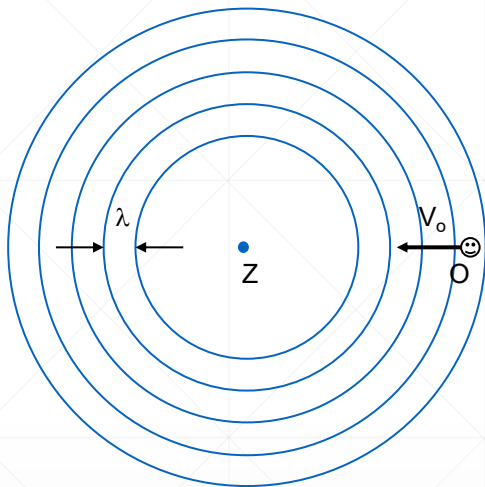
Fale dźwiękowe (akustyczne)

- **dźwięki** to podłużne fale sprężyste rozchodzące się w ciałach stałych, cieczach i gazach o częstotliwościach od 20 Hz (infradźwięki) do 20 kHz (ultradźwięki),
- **ton** – fala harmoniczna o określonej częstotliwości,
wysokość dźwięku – jego częstotliwość, ton podstawowy i wyższe harmoniczne,
natężenie – moc na jednostkę powierzchni, $\sim A^2$ i ω^2 (głośność)
barwa dźwięku – zbiór fal o różnych częstotliwościach, zależy od rodzaju i natężenia tonów składowych (widmo harmoniczne),
- **głośność** - poziom natężenia dźwięku $10\log(I/I_0)$ [dB]
gdzie $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ to natężenie odniesienia - dolna granica słyszalności (0 dB)

(10 dB szelest liści, 60 dB normalna rozmowa, 120 dB granica bólu)

Zjawisko Dopplera – zmiana częstości wynikająca z wzajemnego ruchu obserwatora O i źródła Z

Nieruchome źródło Z wysyła fale koliste a obserwator O zbliża się do Z z prędkością v_0



v – prędkość dźwięku

v_0 – prędkość obserwatora

Dla nieruchomego obserwatora $f = \frac{v}{\lambda}$

Dla obserwatora poruszającego się prędkość przybliżania się kolejnych powierzchni falowych jest większa $v' = v + v_0$

$$f' = \frac{v + v_0}{\lambda} = \frac{(v + v_0)f}{v} = f \left(1 + \frac{v_0}{v} \right)$$

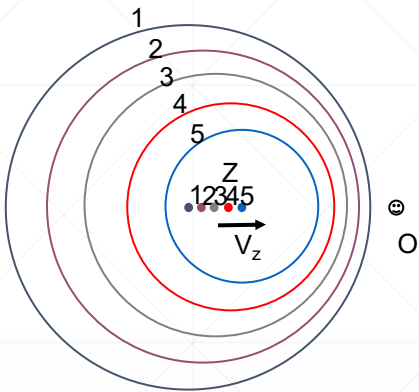
Zbliżający się obserwator odbiera fale o większej częstości

Jakby się oddalał to v_0 jest ujemne i częstość maleje

Zjawisko Dopplera – ruchome źródło

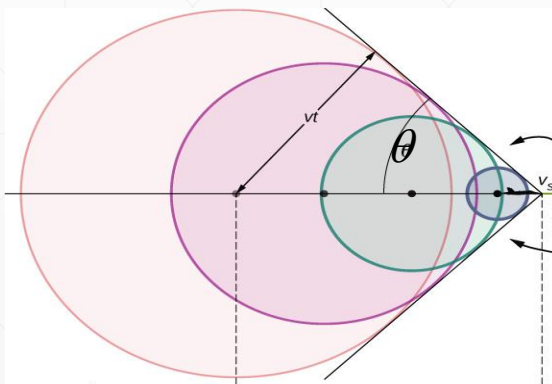
Nieruchomy obserwator źródło zbliża się do obserwatora fala ma mniejszą długość z przodu, a większą z tyłu

v_z – prędkość źródła



$$\lambda' = \frac{v}{f} - \frac{v_z}{f}$$
$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{vf}{v - v_z} = f \frac{1}{1 - (v_z/v)}$$

gdy zbliża się częstotliwość jest większa



gdy prędkość źródła większa jest od prędkości dźwięku powstaje fala uderzeniowa

liczba Macha

$$M = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{v_z}{v}$$

Podsumowanie

- podaliśmy równanie fali biegnącej i jej podstawowe cechy: długość, częstotliwość, wektor falowy, prędkość grupową i prędkość fazową;
- energia przenoszona przez falę – proporcjonalna do kwadratu jej amplitudy,
- fale stojące = drgania normalne,
- opis fal w postaci paczki falowej,
- pojęcie ośrodków dyspersyjnych i niedyspersyjnych,
- właściwości fal akustycznych.



Dziękuję za uwagę